

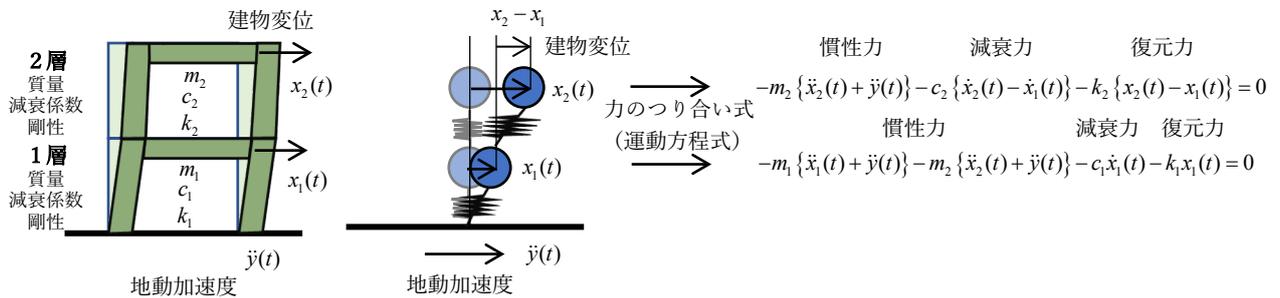
第 8 回：2 質点系モデルの振動解析、および、様々な建物と地震動

1. 振動論の基礎と地震動・地震応答解析

・ 2 質点系振動モデルの運動方程式と自由振動・強制振動

図 1.1 に示すように最も単純な 2 層建物の振動モデルは、各層を質量（質点：m）とばね剛性（k）、減衰係数（c）でモデル化する 2 質点系振動モデルである。このように各層を集中質点系としてばね・減衰で連結する多質点系振動モデル（くし団子モデル）は、現在でも高層建築や免震建築の地震応答解析などに使用されている。

図 1.1 に建物の 2 質点系振動モデルと地動加速度により各質点に作用する力（慣性力・減衰力・復元力）とつり合い式（運動方程式）を示す。



図のつり合い式は 1・2 層で下記の式にまとめられ、最終的にはマトリックスで表せる（教科書の 2.1.2）。

$$1 \text{ 層} : m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{y} \quad (\text{図 1.1 の 2 層の慣性力を代入する})$$

$$2 \text{ 層} : m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = -m_2 \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{y}$$

$$\Rightarrow [M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = -[M]\{1\} \ddot{y} \quad (1)$$

ちなみに、(1)式の [M]、[C]、[K] はそれぞれ質量・減衰・剛性マトリックスと呼ばれる。時々刻々と変化する地動加速度に対する時刻歴応答計算は数値解析手法を用いて計算される。

(1)式のように外力が作用する場合を強制振動、外力が無い場合を自由振動という。建築物の減衰は一般に数%と小さいので、これを無視すると、(1)式は次式で表せる。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (2)$$

次に (2)式の自由振動解を求める。1 層建物と同様に、2 層建物が円振動数 ω で自由振動していると仮定する。この時の変位解は、次式に示すように振動数（時間）の項と振幅の項に分離することができる。

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = e^{i\omega t} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{X\} = e^{i\omega t} \{U\} \quad (3)$$

ここで $\{U\}$ は振幅ベクトルと呼ばれ、自由振動している各層の振幅を意味する。(3.7)式を(3.3)式に代入し、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 k_{11} 等は剛性マトリックスの成分である。線形代数では、(4)式における ω は固有値、振幅ベクトル $\{U\}$ は固有ベクトルと呼ばれ、固有値・固有ベクトルを求める手続きを、固有値問題を解くと言う。一方、振動論では ω は固有円振動数であり、固有ベクトルは固有モードと呼ばれている。

(4)式より ω と $\{U\}$ が求まる。すなわち、自由振動の式である(4)式において振幅ベクトルが常に 0 であることはありえないので、(4)式が成り立つためには係数マトリックスの行列式が 0 になる必要がある。すなわち、

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。上式に「たすきがけ」を行うと、次の式（振動数方程式）を得る。

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11}) \omega^2 + k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21} = 0 \quad (6)$$

上式は ω^2 に関する 2 次方程式である。従って根の公式より解が求まる。

$$\omega^2 = \frac{1}{2m_1 m_2} \left\{ (m_1 k_{22} + m_2 k_{11}) \mp \sqrt{(m_1 k_{22} + m_2 k_{11})^2 - 4m_1 m_2 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})} \right\} \quad (7)$$

ω^2 には $\{ \}$ 内 \mp の - と + の 2 つの値があることに注意されたい。従って ω は(7)式の平方根より求まる（単位は radian/second）。0 より大きい 2 つの ω のうち、小さい方（上式の $\{ \}$ 内 \mp の - の値）は 1 次の固有円振動数（eigen circular frequency または natural circular frequency of the first mode）、大きい方（同、+ の値）は 2 次の固有円振動数と呼ばれ、ここではそれぞれ ω_1 と ω_2 と表記する。1 層建物の場合と同様に、 ω_1 と ω_2 に対応する周期（ $T_i = 2\pi / \omega_i$ ）はそれぞれ 1 次の固有周期（natural period）、2 次の固有周期と呼ばれ、単位は秒である。さらに固有周期の逆数（ $f=1/T$ ）は固有振動数（natural frequency）と呼ばれ、単位は Hz（ヘルツ）である。

次に 1 次・2 次の固有円振動数（ ω_1 と ω_2 ）をそれぞれ(4)式に代入すると、対応する振幅ベクトルである 1 次・2 次の固有モード（固有ベクトル）が求まる。その際、(4)式の第 1 行（第 1 層）と第 2 行（第 2 層）はどちらも等価な式であり、振幅ベクトルの u_1 と u_2 は絶対値ではなく、その振幅比 u_2/u_1 が求まる。例えば、(4)式の第 1 式を用いると、1 階に対する 2 階の振幅比は次式で表せる。

$$\frac{u_{2i}}{u_{1i}} = \frac{k_{11} - \omega_i^2 m_1}{-k_{12}} \quad (i=1,2) \quad (8)$$

具体例として、図 1.2(a)に示すように 1・2 層の質量が $m_1=m_2=10^5$ kg (=100 t)、せん断剛性がそ

それぞれ $k_1=300 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ ($=300 \text{ kN/cm}$)、 $k_2=200 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ ($=200 \text{ kN/cm}$) である 2 層建物の固有周期と固有モードを求めてみる。

まず (7)式より剛性マトリックスの各成分を求め、(3.10)式に代入すると次の振動数方程式を得る。

$$\omega^4 - 700\omega^2 + 60,000 = (\omega^2 - 100)(\omega^2 - 600) = 0$$

従って $\omega_1^2 = 100$ 、 $\omega_2^2 = 600$ 、すなわち固有円振動数は $\omega_1 = 10(\text{rad/秒})$ 、 $\omega_2 \approx 24.50(\text{rad/秒})$ である。対応する固有周期はそれぞれ $T_1 \approx 0.63(\text{秒})$ 、 $T_2 \approx 0.26(\text{秒})$ と求まる。次に (3.12)式を用いると、1・2次モードの振幅比が求まる。

$$1 \text{ 次モード} : \frac{u_{21}}{u_{11}} = 2, \quad 2 \text{ 次モード} : \frac{u_{22}}{u_{12}} = -0.5$$

例として 1 層の振幅を 1 で基準化した場合、1・2 次の固有モードは次式となる。

$$\{U\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \{U\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

モード形を図 1.2(b),(c)に示す。1 次モードでは 1 階と 2 階は常に同位相で揺れ、かつ 2 階の方が 1 階よりも大きく揺れる。それに対して 2 次モードでは 1 階と 2 階は常に逆位相で揺れ、通常は 1 階の方が大きく揺れる。

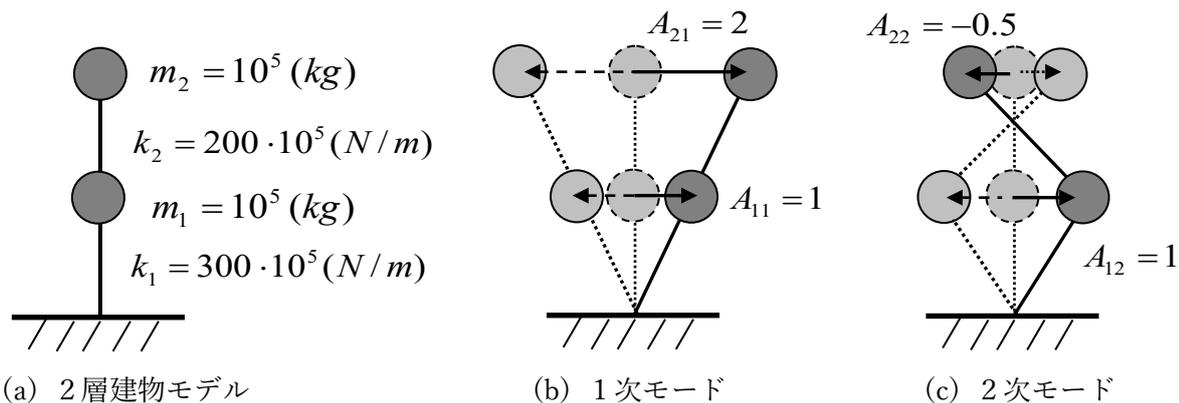


図 1.2 2 層建物モデルの 1 次モード (左) と 2 次モード (右)

・多質点系振動モデルの運動方程式と自由振動・強制振動

質点が多数直列で結ばれる多質点系振動モデルも 2 質点系振動モデルの解法と全く同様に行われ、地動加速度に対する運動方程式は(1)式、非減衰の自由振動の運動方程式は(2)式で表される。地動加速度による時刻歴応答解析や、固有振動数や固有モードを求めるための固有値解析の手続きも全く同じである。超高層建築を多質点系振動モデルで振動解析を行う場合、質点の数だけ固有周期と固有モードが存在するが、一般に 1 次モードが支配的であり、2、3 次モードと高次になるほど影響が小さくなる。通常は 1～3 次モードの重ね合わせで、どのような振動形状も近似することができる。ちなみに図 1.3 に示す 1981 年新耐震設計法 A_i 分布は主に 1 次モードの影響の大きさが考慮されている。

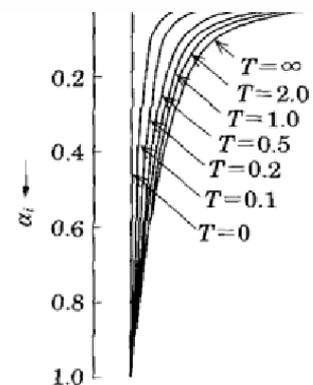


図 1.3 層せん断力係数の高さ方向分布 (A_i 分布)

・工学院大学新宿校舎の振動解析の事例

図 1.4 に新宿校舎の立面図と強震計の位置、および、2011 年東日本大震災時の新宿校舎の南北方向の加速度記録を示す。図 1.5 は立体フレーム解析から得られた固有モード図である。南北・東西方向とも 1 次固有周期が約 3 秒、2 次固有周期が約 1 秒、3 次固有周期が約 0.5 秒である。その他、強風の場合はねじれモードが約 1.8 秒で観測されることがある。加速度波形では 1 次モードの揺れによりの上層ほど大きな振幅を示しているが、波形の前半では 22 階の値は小さくなっており、主に 2 次モードで揺れていたことが分かる。

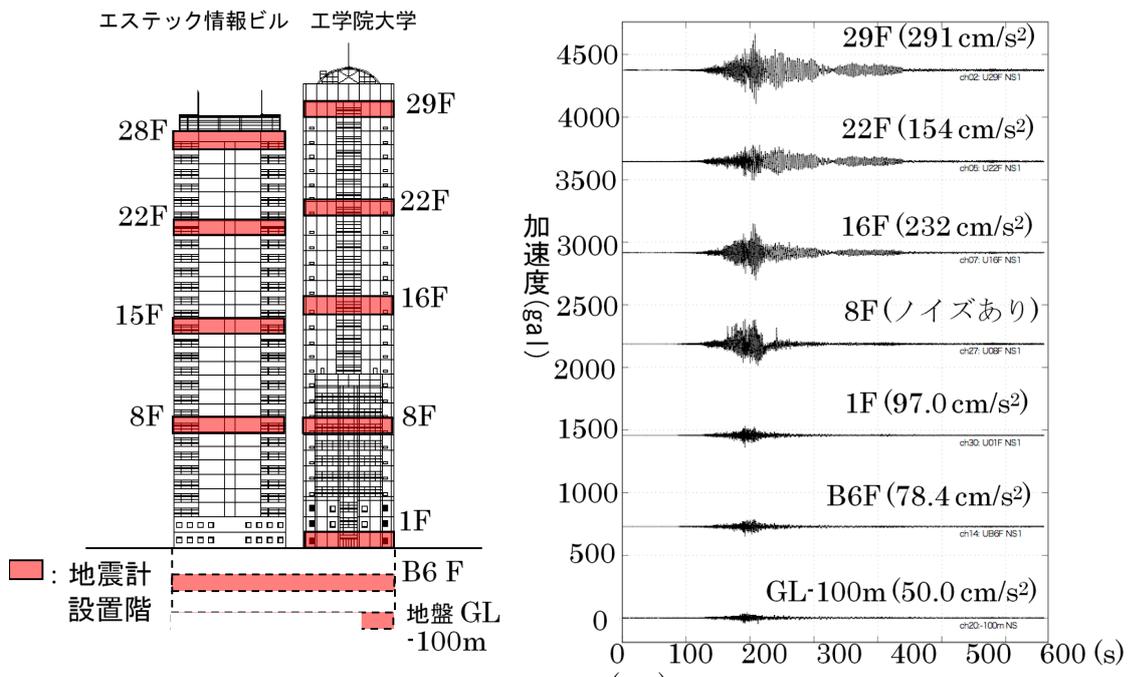


図 1.4 工学院大学新宿校舎の立面図と 2011 年東日本大震災時の新宿校舎の加速度記録(NS 成分)

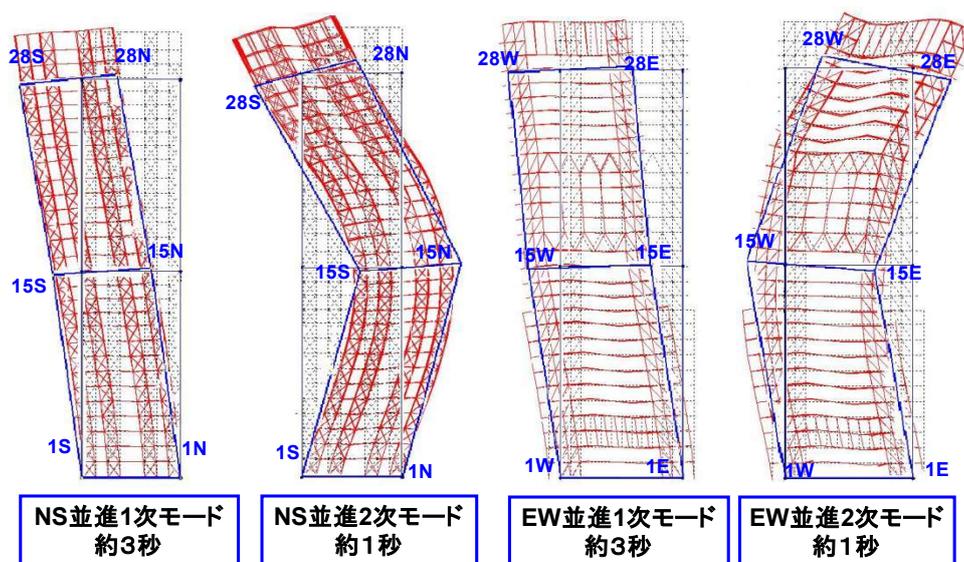


図 1.5 立体フレーム解析から得られた固有モード図

2. 2 質点系モデルによる振動解析ソフト (2 Mass Simulation.exe) の起動と初期画面

2 質点系モデルによる振動解析ソフト (2 Mass Simulation.exe) により、振動論の基礎を理解する。まずソフトを起動すると、図 2.1 の入力画面が現れる。

初期設定		
	一層目	二層目
剛性K(kN/cm) :	300	200
質量(kg) :	100000	100000
1次モード減衰定数(%) :	2	
2次モード減衰定数(%) :	2	
時間設定		
分割時間(s) :	0.01	
解析時間(s) :	10	

外力選択		
	1層目の初期変位	2層目の初期変位
<input type="radio"/> 初期変位(cm)	5	10
	1層目の初期速度	2層目の初期速度
<input type="radio"/> 初期速度(cm/s)	30	60
<input checked="" type="radio"/> 定常波(加速度)	定常波周期(s) :	2
	定常波最大値(cm/s ²) :	300
<input type="radio"/> 定常波(変位)	定常波周期(s) :	1
	定常波最大値(cm) :	1
<input type="radio"/> 地震波		

固有周期表示欄:
一次固有周期(s) : 0.628444232135766
二次固有周期(s) : 0.256561283421302

図 2.1 2 Mass Simulation.exe の入力画面

(1) 入力画面と初期設定

振動モデルのパラメータには、1・2層の剛性 (k : kN/cm)、質量 (m : kg)、減衰 (h : %)、分割時間 (Δt : s)、解析時間 (s) を指定する。図 2.1 はデフォルトの初期設定値であり、「固有周期の表示」ボタンを押すと、1・2次モードの固有周期(T : s)が表示される。

(2) 外力選択 1 と振動解析 (自由振動の場合)、結果の保存

自由振動解析 (外力なし) を行う場合、入力画面の右欄の初期変位 (cm) か、初期速度 (cm/s) を指定する。例として、初期変位の○にチェックを入れると、デフォルトで1層が 5 cm、2層が 10 cm の初期変位の自由振動が設定される (図 1.2(b)の 1 次モード形に対応)。「解析開始」ボタンを押すと、図 2.2 のウィンドウが開き、振動計算を実行する。画面の左側の波形の図は、上から入力加速度 (自由振動の場合は無し)、2 質点系モデルの応答加速度・応答速度・応答変位であり (赤線が上層、青線

が下層)、その左覧には各層の最大・最小値が表示される。画面の右側には、2質点系モデルの振動の様子や計算時刻とその時の入力加速度・応答加速度・応答速度・応答変位が表示される。この例題では、上層と下層が同位相で振動し、常に上層の振幅が大きい1次モードで自由振動していることを確認する。

計算が終了すると、解析終了のボタンが現れるので、OK を押すと計算画面が閉じる。

・2次モードで揺らす場合は、入力画面の初期変位で、1層が10 cm、2層が-5 cm の初期変位と設定する(図 1.2(c)の2次モード形に対応)。「解析開始」ボタンを押し、2次モードで自由振動することを確認する。

(3) 計算結果データの保存法：

入力画面(図 2.1)の「保存先選択」ボタンを押すと、図 2.3 のウィンドウが開く。結果を出力するファイル名を半角英数字で指定する(拡張子は不要)。例えば、example1 と入力し、「保存先選択」ボタンを押すと、画面が閉じる。入力画面(図 3)に戻り、「保存」ボタンを押すと、データが csv 形式で保存される。データは csv ファイルなので、エクセルで波形などの図を作成し、課題の作成に利用できる。

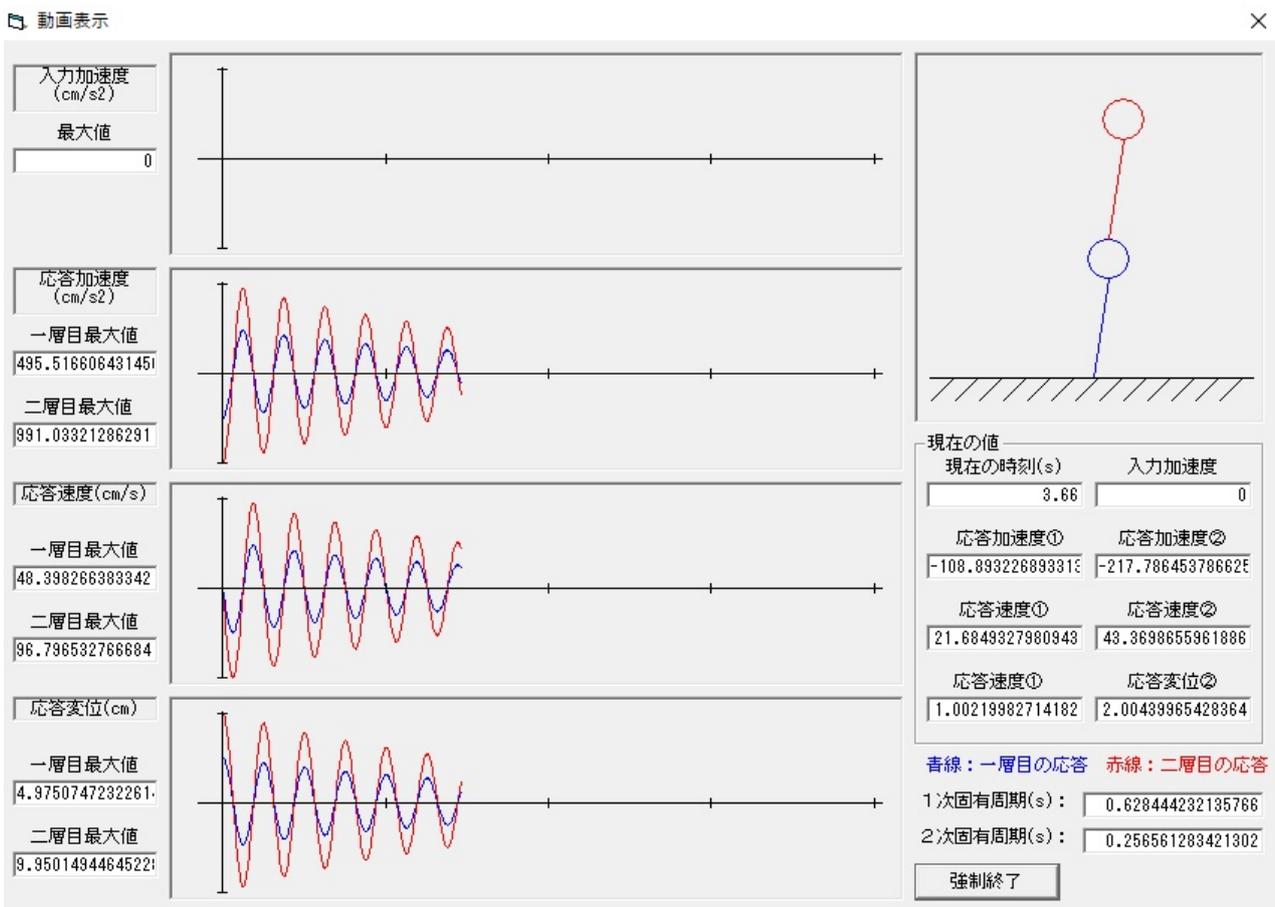


図 2.2.2 Mass Simulation.exe の計算画面 (自由振動)

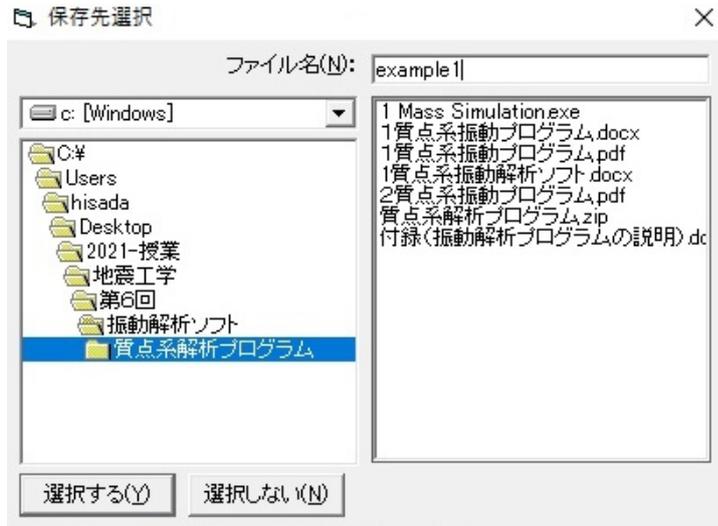


図 2.3 保存先選択画面

(4) 外力選択 2 と強制振動による応答解析 (sin 波入力の場合)

外力の地動入力を定常波（調和加振、sin 波加振）とする場合、入力画面（図 2.1）の右欄の定常波（加速度）か、定常波（変位）を指定する。例として、定常波（加速度）の○にチェックを入れると、デフォルトで周期 2 秒、振幅 300 cm/s^2 の定常波とする地動加速度による強制振動が設定される。「解析開始」ボタンを押すと、図 2.2 のウィンドウが開き、計算を実行する。画面左の一番上の波形は、外力の加速度波形であり、この場合は sin 波が表示される。計算が終了すると、解析終了のボタンが現れるので、OK を押すと計算画面が閉じる。計算結果データの保存法は、外力選択 1 と全く同じであり、図 2.3 の保存先選択ウィンドウで、例えば、example2 と入力し、「保存先選択」ボタンを押すと、画面が閉じる。入力画面（図 2.1）に戻り、「保存」ボタンを押すと、データが csv 形式で保存される。

・共振現象：強風や長周期地震動と制振（制震）構造

建物の固有周期と入力 sin 波の周期が一致すると、共振現象が発生し、建物の応答が時間の経過とともに増大する。特に建物の減衰が小さいと、建物応答はどんどん成長し、非常に危険な状態になる。応答を低減させるには、建物の周期を変化させて共振を避けるか、減衰を大きくする。2 質点系モデルでは、1 次モードと 2 次モードの 2 つの共振パターンがあるので、双方の共振と減衰の効果を試してみる。一般に S 造の超高層建築は減衰が非常に小さく（1%程度）、長周期地震動に共振することが懸念されている。近年はダンパー（減衰）を付加し、制振（制震）構造にするなどの対策が求められている。

(5) 外力選択 3：地震応答解析（地震波入力の場合の強制振動）

外力の地動入力を地震の加速度波形とする場合、入力画面（図 2.1）の右欄下の地震波を指定し、○にチェックを入れる。「地震波選択」ボタンを押すと図 2.4 の地震波選択画面が開く。地震加速度波形は、例えば、下記のデータの選択が可能である。

- ・ Elce NS.csv（エルセントロ波形の NS 成分）：世界標準で用いられる加速度波形
- ・ Hach EW.csv：八戸波（EW 成分）：1968 年十勝沖地震の八戸港湾で得られ、約周期 2.8 秒の長周

期地震動を観測した波形。日本では標準波の1つとして扱われる。

- **Kobe NSR.csv (JMA 神戸波形の NS 成分)** : 1995 年兵庫県南部地震の神戸海洋気象台で得られた波形。活断層近傍の指向性パルス (キラーパルス) が観測されている。
- **Nishi EW.csv (西原波形の EW 成分)** : 2016 年熊本地震の地表地震断層ごく近傍の西原村役場で観測された波形。断層すべりに起因する長周期パルス (フリングステップ) が観測されている。

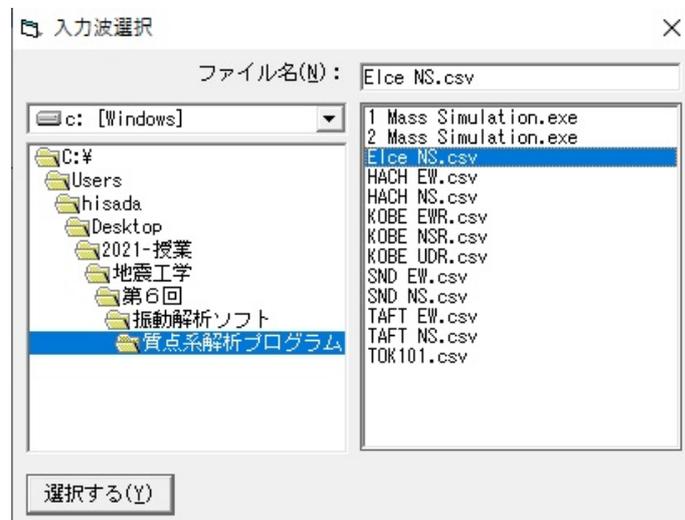


図 2.4 地震波選択画面

例えば、標準波である Elce NS.csv を選択した場合が、図 2.4 の画面であり、決定の場合は「選択する」ボタンを押す。時間分割、その他のメッセージが現れるので、「OK」ボタンを押す。「解析開始」ボタンを押すと、図 2.2 のウィンドウが開き、計算を実行する。計算が終了すると、解析終了のボタンが現れるので、OK を押すと計算画面が閉じる。計算結果データの保存法：外力選択 1 と全く同じ。図 2.3 の保存先選択ウィンドウで、例えば、example3 と入力し、「保存先選択」ボタンを押すと、画面が閉じる。入力画面 (図 3) に戻り、「保存」ボタンを押すと、データが csv 形式で保存される。

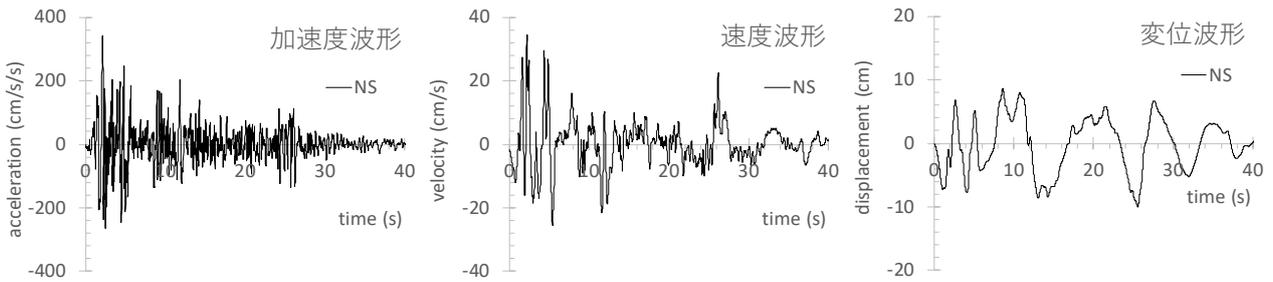
(6) 様々な建物 (耐震・制振・免震) の地震応答解析を行い、その特性を調べる

標準波である Elce NS.csv の地震応答と比べて、特徴ある地震動に対して短周期や長周期の建物、減衰の大小の建物などの応答特性がどのように変化するかを調べてみる。

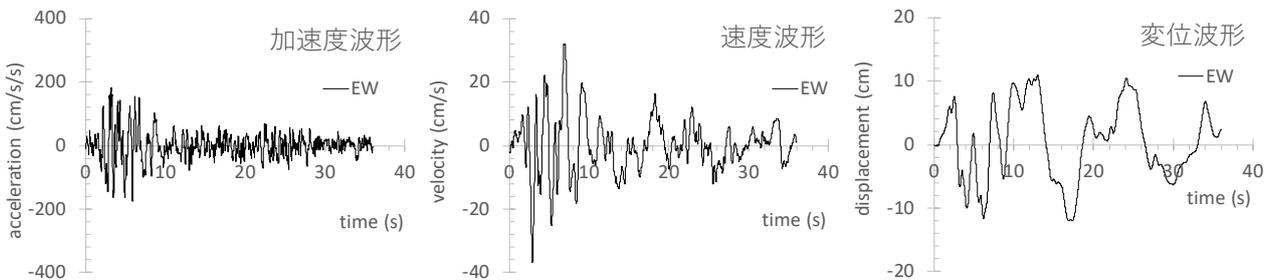
- **建物の固有周期を変える (耐震建物)** : 固有周期を変えるには、剛性あるいは質量を変化させる。例えば、質量は変えないで ($m_1=m_2=100,000$ kg)、 $k_1=k_2=11$ kN/cm とすると $T_1=3.1$ s、 $T_2=1.2$ s となり、ほぼ工学院大学新宿校舎の固有周期の値に近くなる (質量と剛性は全く異なる!)。減衰定数 $h_1=h_2=2\%$ として、様々な応答解析を行ってみること。
- **建物の減衰を変える (制振構造)** : 2%の減衰定数から、ダンパーを増加 (制振ダンパー) するなどで 5%の減衰にして、応答解析を行うこと。
- **建物の固有周期を変える (免震建物)** : 一層目の剛性を小さく、2層目の剛性を大きくして、疑似的に免震構造モデルを作成する。例えば、質量は変えないで ($m_1=m_2=100,000$ kg)、 $k_1=5$ kN/cm、 $k_2=200$ kN/cm とすると $T_1=4.0$ s、 $T_2=0.31$ s となり、周期 4 秒の免震建物となる。減衰定数 $h_1=h_2=10\%$ として、様々な応答解析を行ってみること。耐震構造と比べて、免震構造の揺れの特徴を理解すること。

(7) 標準波と特徴的な地震動による建物の応答特性の違いを理解する

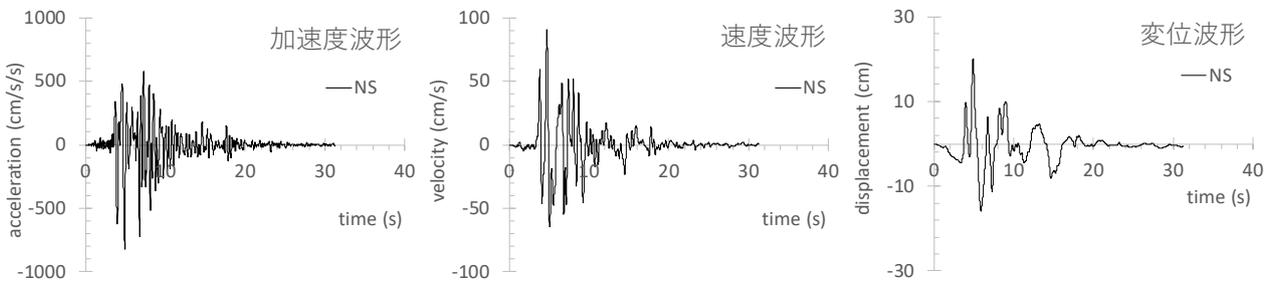
Elce NS.csv は短周期地震動が卓越する万国共通の標準波であり、現行の大地震に対する耐震設計の基準となっている。一方、HACHEW.csv は軟弱地盤で周期 2.8 秒程度が卓越する長周期地震動、KOBE NS.csv は活断層近傍の周期 1 秒程度が卓越するキラールパルス（指向性パルス）、NISHI EW.csv は、地表地震動のごく近傍で周期 3 秒程度以上の長周期パルス（フリングステップ）、がそれぞれ特徴となる地震動である。図 2.5 に様々な地震波（加速度・速度・変位波形）、図 2.6 に加速度・速度応答スペクトルを示す。



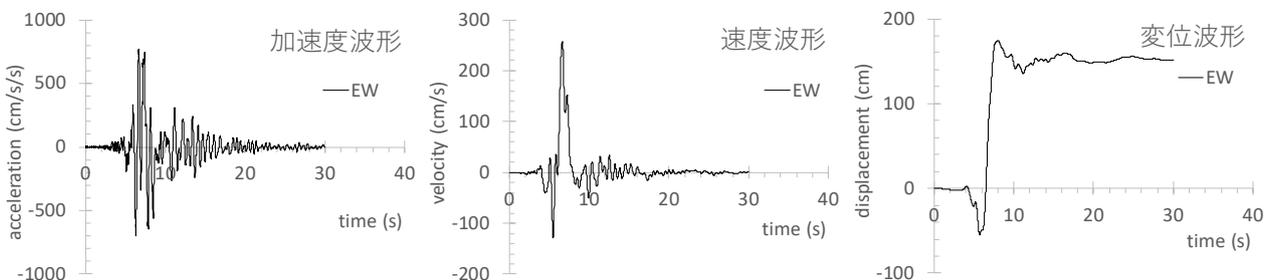
(a) El Centoro NS 波形（1949 年インペリアルバレー地震、左：加速度、中：速度、右：変位）



(b) 八戸 EW 波形（1968 年十勝沖地震、左：加速度、中：速度、右：変位）



(c) JMA 神戸 NS 波形（1995 年兵庫県南部地震、左：加速度、中：速度、右：変位）



(d) 西原 EW 波形（2016 年熊本地震、左：加速度、中：速度、右：変位）

図 2.5 耐震設計における地震応答解析で使用される様々な強震記録

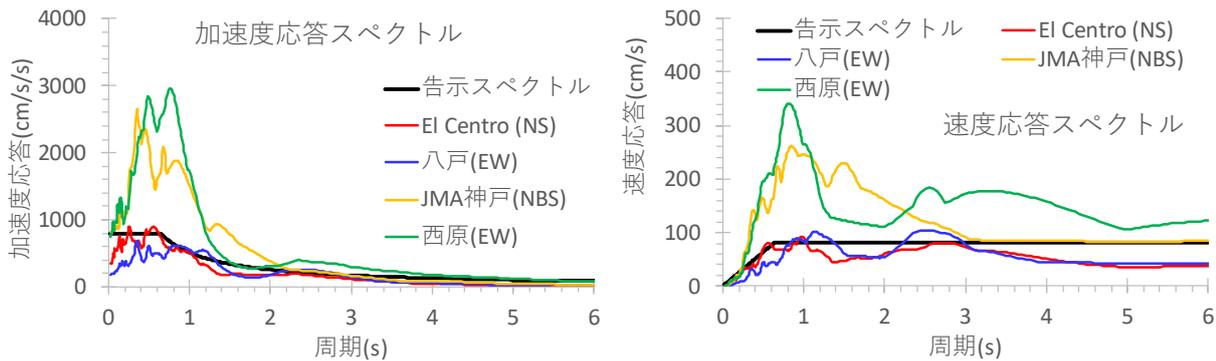


図 2.6 様々な強震記録による加速度・速度応答スペクトル (減衰 5%)

それぞれの地震動の特徴を理解し、耐震性の低い低層建物（破壊時の固有周期が 1 秒程度）と高い建物（例えば、固有周期が 0.3 程度）、超高層建物や免震・制振建築に与える影響を調べてみよう。

例えば、参考資料 1 は、2011 年熊本地震の長周期パルス（西原波）が超高層建築に与える影響、長周期地震動と長周期パルスの違いなどが説明されている。また参考資料 2 には、長周期地震動と様々な対策、加えて、強風による共振現象の恐怖などが紹介されている。

参考資料 1 (様々な地震動と建築の耐震・防災) :

- NHK スペシャル (2011 年熊本地震の長周期パルス) : 長周期パルスと超高層の応答解析、長周期地震動との違い
<https://drive.google.com/drive/folders/1QWxBKtNR54Q-3OngqCvN03jCGiEqI-OG> (注意: 他人に渡さないこと!)
 久田研究室: 第 1 回: 強震動と地震防災・減災 ~ 第 4 回 超高層建築の震災対策、ほか (構造技術者向けの解説)
<https://www.sein21.jp/TechnicalContents/Hisada/Hisada0101.aspx> (NTT ファシリテーターズ、SEBWEB)
 久田研究室: 第 1 回から第 7 回 (NHK、そなえる防災: 一般市民向けの解説)
<https://www.nhk.or.jp/sonae/column/20150637.html>
 久田研究室: 巨大地震、高層ビルを襲う「長周期地震動」「逃げずに留まる」「自助・共助」大都市型防災で臨む
<https://nordot.app/382767791499232353> (リスク対策.com)
 久田研究室: 「災害時、逃げる必要のない建物とまちづくり (第 1 部から第 4 部まで)」
<https://shisokuyubi.com/special-column/Disaster-prevention-city01> (防災意識を育てる WEB マガジン「思則有備」)

参考資料 2 (長周期地震動と超高層建築の振動解析、制振ダンパーの効果など) :

- ・フジ TV NewsJapan (2011-6-21) : 311 地震と南海トラフ地震による新宿校舎の地震応答解析・対策など
<https://drive.google.com/drive/folders/1RHj6AHz30DucZSzhw1A5B6mSRhzMygcT> (注意: 他人に渡さないこと!)
- ・新宿校舎の地震応答解析 (制振ダンパーの有無による被害程度の違い)
 - ・311L2-D00 x D44-amp10.mp4 : D00 (ダンパー無し) と D44 (44 個ダンパー) に告示 L2 波 (工学院 311 波位相) を EW 方向に入力。振幅 1.0 倍表示
 - ・告示 L2-D00 x D44-amp10.mp4 : D00 (ダンパー無し) と D44 (44 個ダンパー) に告示 L2 波 (ランダム位相) を EW 方向に入力。振幅 1.0 倍表示
- ・中国の高層ビル 突然大きな揺れ : <https://www.youtube.com/watch?v=AJF29ytSfjU>
- ・強風による共振現象で崩壊したタコマ橋 (1940) : https://www.youtube.com/watch?v=VJ0JILWo_vw