

建築物の減衰

Damping in Buildings

2000

日本建築学会

4章 実測による建築物の減衰定数の推定法

4.1 減衰定数の評価法の概要

4.1.1 実測に基づく減衰定数の評価法の分類

減衰定数を評価するための実測データの取得法は、対象となる振動の種類（定常振動、自由振動、ランダム振動など）によって異なる。

特定モードの減衰定数を評価するための典型的な実験方法は、そのモードの固有振動数で適切に加振して、そのモードのみでの振動状態を実現した上で加振源を断ち切り、そのモードでの自由振動波形を得ることである。しかしながら、現実には起振機などの加振源の能力の問題もあり、大きな振幅や低振動数域での実施は困難であるので、常時微動や風応答、地震応答記録から減衰定数を評価することも行われている。

表 4.1.1 に、実測データの取得法と実測データの分析方法、および減衰定数の評価法についてまとめて示した。これらの各方法については、4.2 節以下で詳細に解説する。

減衰定数の評価法は、周波数応答データを用いる方法と自由振動波形を用いる方法およびシス

表 4.1.1 実測に基づく減衰定数の評価法の分類

振動の種類	実測データの取得法	取得データ	実測データの分析方法	主な減衰定数の評価法
定常振動	起振機による 定常加振	振幅と位相 (周波数データ)	共振曲線と 位相曲線* (周波数データ)	周波数 応答データ カーブフィット法
ランダム振動	定常微動測定	ランダム波形 (時刻歴波形)	周波数応答データに変換 フーリエスペクトル パワースペクトル密度 伝達関数**	周波数 応答データ ハーフパワー法, $1/\sqrt{2}$ 法 位相勾配法
	地震応答観測		自由振動波形に変換 自己相関関数法 RD 法	自由 振動波形 振幅減衰比による方法 最小 2 乗法による方法
自由振動	起振機や制振装置 で加振後急停止 人力加振法 引き綱法 振り子法	自由振動波形 (時刻歴波形)	フィルタ処理の 自由振動波形	自由 振動波形 振幅減衰比による方法 最小 2 乗法による方法
ランダム振動や自由振動による時刻歴波形			システム同定手法：拡張カルマンフィルタ, ARX 法, ARMAX 法 など	

*応答波形の振幅と位相差を加振振動数に対して表した図

**通常、風振動観測には使われない。

テム同定手法を用いる方法に分類できる。これらのうちのいずれの分類に属するかは、振動実験や観測で得られる実測データの種類やその分析方法によって決まる。

周波数応答データを得るための方法としては、起振機による定常加振実験により共振曲線や位相曲線を直接得る方法や、常時微動、風応答、地震応答などの時刻歴波形のスペクトル解析（フーリエスペクトル、パワースペクトル密度、伝達関数など）を行う方法などがある。減衰定数の評価法としては、カーブフィット法（最小2乗法）や $1/\sqrt{2}$ 法、ハーフパワー法などが用いられる。これらの評価方法については、4.4.2項で説明する。

一方、自由振動波形を得るための方法としては、起振機による加振後急停止、人力加振、引き綱、振り子などによる自由振動実験のほか、常時微動、風応答、地震応答などの時刻歴波形に自己相関関数法やRD法（Random Decrement Technique）を用いる方法などがある。自由振動波形から減衰定数を評価する方法としては、振幅減衰比による方法や最小2乗法による方法などが用いられる。これらの評価方法については、4.4.1項で説明する。

また、時刻歴波形から直接減衰定数を評価するシステム同定手法もあり、周波数領域で近接した複数のピークが見られる場合や地震観測記録のように比較的短時間のデータしか得られない場合などに有効である。この同定手法については、4.4.3項で説明する。

4.1.2 実測データの取得法の選び方

減衰定数の評価に当たり、実際の建物個々に対してどのような実測データの取得法が適しているのかを判断する目安として、表4.1.2には主な対象建物の種別と各種実測データの取得法の適用性との関係を記し、表4.1.3には各実測データ取得法の長所、短所をまとめて示した。

適用性の評価としては、○、△、×により示したが、△には建物によって適用できない場合も含まれる。各実測データの取得法には、それぞれ長所、短所があり、与えられた状況に応じた方法を選ぶことが望ましい。

表4.1.2 対象建物に対する実測データの取得法の適用性評価

○：適している △：適用可能 ×：適用不可

対象建物	実測データの取得法							
	回転式起振機	スライドマス式起振機*	引き綱法	振り子法	人力加振法	常時微動	風応答	地震応答
高層建物	△	○	△	○	○	○	○	○
中、低層建物	○	△	△	△	○	○	△	○
煙突、塔状構造物	△	○	○	△	△	○	○	○
原子炉建屋	○	×	×	×	×	×	×	○

*アクティブ制振装置を起振機として利用した場合を含む

表 4.1.3 各実測データ取得法の長所と短所

実測データの取得法	長 所		短 所	
回転式起振機	・事前に加振位置や加振方向の選択可	・加振力, 加振位置が既知 ・定常加振のほか, 自由振動試験も実施可能 ・実績, 信頼度が大きい	・低振動数域での加振力が小さい	・設置等の準備が必要 ・振動のノード(平面上, 立面上)や主軸方向を事前に予測する必要あり
スライドマス式起振機*	・低振動数域でも大きな加振力が得られる		・制振装置では加振位置や加振方向に制約	
引き綱法	・自由振動波形が得られ, 振動数や減衰が直接的に得られる		・装置製作や設置など準備が大がかりになる傾向あり ・初期変位の解放時に十分な安全対策が必要	・近接ピークのある場合に評価が困難 ・高次振動数までの評価は一般的に困難
振り子法				
人力加振法	・加振源の設置が不要		・共振振動数, 振動のノードや主軸方向を事前に予測する必要あり ・十分な加振精度が必要 ・微振動のため風や局所的な振動の影響が含まれる	
常時微動	・下部入力のため, 伝達関数により建物のみ減衰評価が可能 ・長時間測定で周波数分解能が向上	・加振源の設置が不要	・微振動のため風や局所的な振動の影響が含まれる ・データ解析にややデリケートさが要求される ・地盤との相互作用の影響が含まれる	
風応答	・大振幅での減衰評価が可能 ・強風時の減衰評価が可能	・水平2方向同時測定で振動主軸が分からなくても分析で対応可	・空力減衰の影響が含まれる	
地震応答	・大振幅での減衰評価が可能 ・地震時の減衰評価が可能		・地盤との相互作用の影響が含まれる ・非線形性の影響が含まれる	

*アクティブ制振装置を起振機として利用した場合を含む

体の大きさに応じて選定する。

- ⑦ 振動計は地震応答観測システムと兼用可能であるが、風応答は長周期の1次振動が卓越するため、最上部でも加速度はさほど大きくならず、アンプのゲイン設定に注意が必要である。センサーを兼用し、測定システムを2系統用意できれば、精度の良い計測が可能である。
- ⑧ 地震応答観測システムと兼用する場合、データ収録装置は1階、地下階に設置されることが多く、収録装置までの距離が長くなるため、ケーブルのノイズ対策が必要である。
- ⑨ 制振装置を有する建物では、制振装置が稼動していない状態での測定をしておくことが望ましい。

台風、地震等の自然現象は恣意的であり、有益なデータを蓄積するためには、以上のような点について十分に配慮するとともに、長期間にわたって観測を継続することが必要である。

4.3 実測データの分析方法

4.3.1 実測データから自由振動波形を推定する方法

自由振動波形は時間領域における構造物の振動特性を端的に表現する情報であり、振動数領域における周波数応答データと並んで振動特性の推定に重要な役割を果たしている。自由振動波形が得られれば、4.4.1項で述べる方法により構造物の固有振動数や減衰定数を比較的容易に評価することができる。自由振動実験の実測データが自由振動波形であることは言うまでもない。ランダム振動においても入出力を観測することができれば、原理的にはインパルス応答の形で自由振動波形が得られる。最小2乗法を用いたインパルス応答推定の枠組みは表4.4.1にFIRモデルとして紹介されている。しかしながら、構造物は一般に無限長のインパルス応答を持つため、打ち切り誤差の影響を無視できない。ところで、理論的にはインパルス応答を伝達関数の逆フーリエ変換によっても求めることができる。しかしながら、雑音に乱された実際の観測データを用いた場合には、必ずしも因果性が満足されないといった実用上の問題が残る。このような理由から、直接的にインパルス応答を経由して構造物の振動特性を推定した事例は限られている。一方、線形時不変システムに対する入力が白色雑音であるとみなせる場合には、以下で示すように出力の自己相関関数を自由振動波形と近似することが可能である。実際に入力の白色性が満足されることは稀であるが、出力のみの観測によって振動特性を推定することができるため、入力計測が困難な風応答観測をはじめとして数多くの応用例が見られる。

こうした推定法のほとんどは構造物の線形性や応答の定常性を前提としている。実在する構造物は振動特性が振幅に依存するといった非線形性を示すことが多く、通常は定常性が成立していない。ここで紹介する推定法はあくまでも理論的な原理であり、観測データへの適用にあたっては定常性などの詳細な検討が重要となることに注意されたい。

以下では線形システムを対象とする自己相関関数法、RD法の順に述べ、さらにRD法を非線形システムへ拡張した手法について触れることにする。

(1) 自己相関関数法

システムの入力を直接観測することが困難な場合など、条件によっては出力の自己相関関数を自由振動波形と見なすことが可能である。線形時不変システムの入力 $f(t)$ と応答 $x(t)$ の関係はインパルス応答 $g(t)$ を用いて次式のように表すことができる。

$$x(t) = f(t) \otimes g(t) \quad (4.3.1)$$

ここに、 \otimes は次式の合成積を表す。すなわち

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (4.3.2)$$

である。入力 $f(t)$ が定常過程であれば入出力の自己相関関数は次式を満足する。

$$R_{xx}(\tau) = R_{ff}(\tau) \otimes g(-\tau) \otimes g(\tau) \quad (4.3.3)$$

上式は次のように表すこともできる。

$$R_{xx}(\tau) = f_*(\tau) \otimes g(\tau) \quad (4.3.4)$$

$$f_*(\tau) = R_{ff}(\tau) \otimes g(-\tau) \quad (4.3.5)$$

これは応答の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ がシステムに $f_*(t)$ を入力した際の応答に等しいことを意味している。因果性を満足する物理システムの場合 $t > 0$ に対して $g(-t) = 0$ である。したがって、入力の自己相関関数が $|\tau| > \tau_0$ に対して $R_{ff}(\tau) = 0$ なる条件を満足すれば、 $\tau > \tau_0$ の範囲で $f_*(\tau) = 0$ であり自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ は自由振動波形となる。すなわち、入力がシステムに対して十分に広帯域であれば、応答の自己相関関数は原点近傍を除いて自由振動波形と見なすことができる。これらの関係を図 4.3.1 に示す。特に入力が白色雑音であれば $\tau > 0$ の範囲で $f_*(\tau) = 0$ であるから応答の自己相関関数は厳密に自由振動波形となる。

さて、簡単のために $x(t)$ が平均値 0 の定常過程であるとする。このとき有限個数 N の離散時間観測データ $x(t_i) (i=1, \dots, N)$ から自己相関関数 $R_{xx}(t_k)$ を推定するために、次式で示す 2 つの手法がよく用いられる。

$$R_{1xx}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} x(t_i)x(t_{i+k}) \quad (4.3.6)$$

$$R_{2xx}(t_k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x(t_i)x(t_{i+k}) \quad (4.3.7)$$

$R_{1xx}(t_k)$ の期待値は $(1-k/N)R_{xx}(t_k)$ であるから、明らかに偏りのある推定値である。 $R_{2xx}(t_k)$ は不偏推定値であるが、 k が大きくなると推定誤差の分散が増大してしまう。両者とも N が十分に大きければ真値に近づく。一方、自己相関関数はパワースペクトル密度関数を逆フーリエ変換することにより、振動数領域を經由して求めることもできる。高速計算が可能であることからフーリエ変換に際しては FFT アルゴリズムを用いることが多い。直接的に FFT アルゴリズムを適用する方法は観測データを周期的に用いる次式と等価である。

$$R_{3xx}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)x(t_{i+k}) \quad (4.3.8)$$

ただし、 $i+k > N$ に対して $x(t_{i+k}) = x(t_{i+k-N})$ とする。

このように暗黙の周期化が行われるため、通常は窓関数や区分的平均により継ぎ目の影響を考

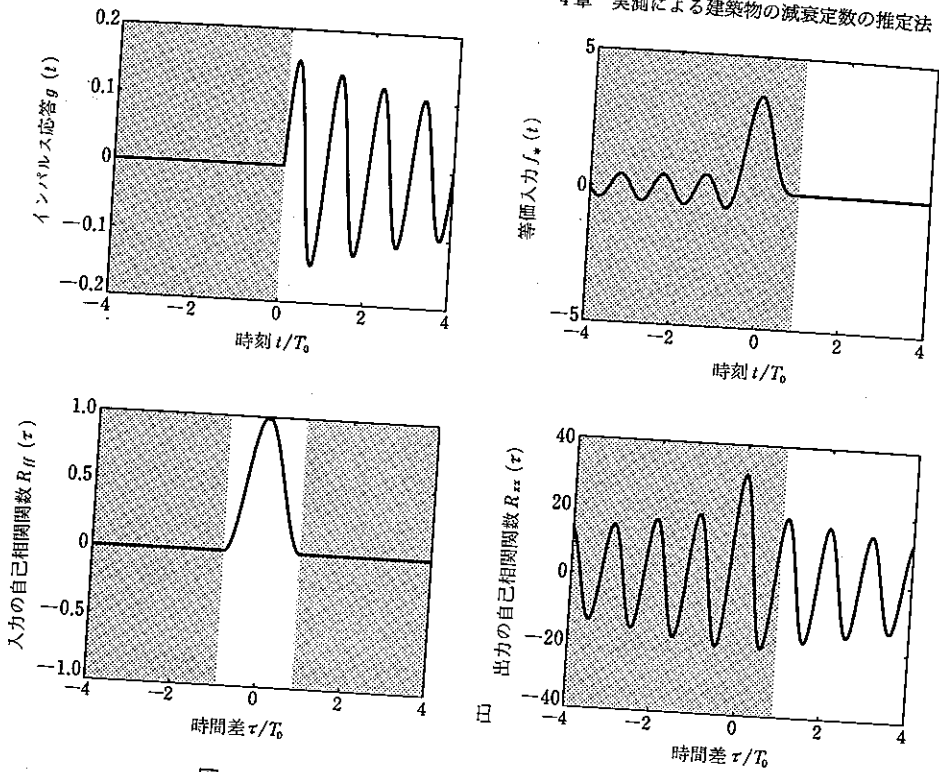


図 4.3.1 自己相関関数による近似例 ($\tau_0=0.9 T_0$)

慮しなければならない。このほか MEM などによって同定した AR モデルの係数より自己相関関数を求めることもある。

(2) RD 法

RD 法として知られる Random Decrement 法は自己相関関数推定法の 1 つである。RD 法では応答 $x(t)$ から条件に応じて部分サンプルを多数切り出し、それらを平均することにより RD 波形 $a(\tau)$ を求める。

$$a(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(t_i) x(t_i + \tau) | C \tag{4.3.9}$$

ここに、 N : サンプル数

$w(t)$: 重み係数

C : 部分サンプルを特定するための条件

条件 C と重み係数 $w(t)$ の組合せにより、多種多様な RD 法が考えられる。代表的な組合せの例を表 4.3.1 にまとめてある。定常過程を対象とした場合、表中の組合せを用いた RD 波形はいずれも自己相関関数の推定値となることが知られている⁵⁰⁾。組合せ(2)および(3)では振幅を限定することにより、システムの動特性が持つ振幅依存性の評価が可能である。これらの手法では特定の振幅に対応する動特性を選択的に抽出するため、前述の線形性や定常性に関する適用限界を緩和することができるものと考えられる。こうした非線形システムに対する RD 法の適用可

表 4.3.1 代表的な条件と重み係数の組合せ

組合せ	条件 C	重み係数 $w(t)$	備考
(1)	$\dot{x}(t)=0$	$\text{sgn}(x)$	Ranked RD 法 ⁵⁷⁾
(2)	$x(t) \in R, \dot{x}(t)=0$	$\text{sgn}(x)$	
(3)	$x(t)=x_*$	1	本文中で解説 直接法
(4)	$x(t)=x_*, \dot{x}(t)=0$	1	
(5)	なし	$x(t)$	

$\dot{x}(t)$: $x(t)$ の時間微分
 x_* : 対象とする振幅

$\text{sgn}(x)$: x の符号
 R : 対象とする
 振幅範囲

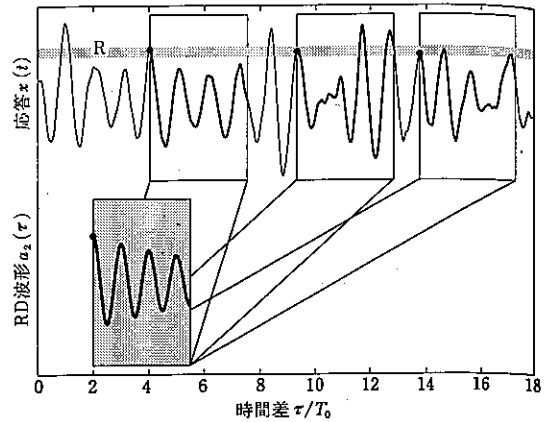


図 4.3.2 RD 法における条件付き平均の概念

能性は主として数値シミュレーションにより確認されている。図 4.3.2 は組合せ(2)を例として RD 法における条件付き平均の概念を示したものである。

ここでは基本となる表中(4)の組合せを例にとって RD 波形の性質を検討する。

$$a_4(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i + \tau) |_{x(t_i)=x_*, \dot{x}(t_i)=0} \quad (4.3.10)$$

条件付き期待値の解析的な評価は一般に困難なので、応答 $x(t)$ は平均値 0 の定常ガウス過程であると仮定する。このとき次式が成立する。

$$a_4(\tau) \sim \mathcal{N} \left(\frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} x_*, \frac{1}{N_e} \left[R_{xx}(0) - \frac{R_{xx}^2(\tau)}{R_{xx}(0)} + \frac{\dot{R}_{xx}^2(\tau)}{R_{xx}(0)} \right] \right) \quad (4.3.11)$$

ここに、 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: 平均値 μ , 分散 σ^2 のガウス確率変数

$R_{xx}(\tau)$: $x(t)$ の自己相関関数

N_e : 相関を考慮した等価なサンプル数

特に、 N 個の部分サンプルが十分に離れた時刻から切り出されていれば、各部分サンプルは互いに独立と考えられ $N_e=N$ となる。式 (4.3.11) より RD 波形 $a_4(\tau)$ から応答の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ を推定できることがわかる。図 4.3.3(a) は減衰定数 3% の線形 1 自由度系にガウス白色雑音を入力し、 $x_*^2=R_{xx}(0)=1$ の場合について $N_e=100$ として式 (4.3.11) を評価した例である。また、図 4.3.3(b) は同様の条件で $N=100$ としてシミュレートした RD 波形の 1 例である。時間差 τ が大きくなるほど推定精度は低下することに注意が必要である。推定精度を変動係数で表す場合、式 (4.3.11) より $a_4(\tau)$ の変動係数 $c_a(\tau)$ は次式で表される。

$$c_a^2(\tau) = \frac{R_{xx}^2(0)}{N_e R_{xx}^2(\tau) x_*^2} \left[R_{xx}(0) - \frac{R_{xx}^2(\tau)}{R_{xx}(0)} + \frac{\dot{R}_{xx}^2(\tau)}{R_{xx}(0)} \right] \quad (4.3.12)$$

以下では減衰定数 h の線形 1 自由度系を対象として RD 法の推定精度について考察する。自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ が自由振動波形と見なせるものとして、RD 波形の極値に着目する。固有周期を T_0 とすれば任意の整数 n に対して $\dot{R}_{xx}(nT_0)=0$ であるから、式 (4.3.12) と振幅減衰率の

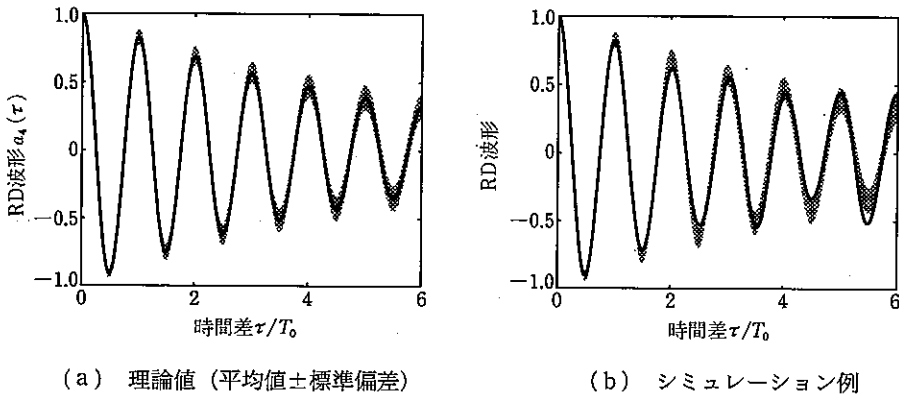


図 4.3.3 線形1自由度系の RD 波形

関係を用いれば次式を得る。

$$c_a^2(nT_0) = \frac{R_{xx}(0)}{N_e x_*^2} \left\{ \exp\left(\frac{4\pi n h}{\sqrt{1-h^2}}\right) - 1 \right\} \quad (4.3.13)$$

さらに、 $h \ll 1$ として1次近似を用いれば次のように簡略化することができる。

$$c_a^2(nT_0) = \frac{4\pi n h R_{xx}(0)}{N_e x_*^2} \quad (4.3.14)$$

上式を用いれば、減衰定数の予測値 h と n 周期までの極値に許容される変動係数 $c_a(nT_0)$ を設定することにより、必要なサンプル数 N_e の目安を得ることができる。

(3) 非線形システムへの応用

実在する構造物の多くは振動特性が振幅に依存するといった非線形性を有することが知られている。ここまでは線形時不変システムの定常応答を対象に自由振動波形の推定方法を述べてきたが、非線形システムの減衰定数を積極的に評価することも重要な課題である。表 4.3.1 に示した RD 法の組合せ(2)および(3)は線形システムの自己相関関数推定法をベースに振動特性の振幅依存性評価を目指した手法である。1つの観測データに含まれる大小の振幅を選択的に利用するため、短い観測データから効率よく振幅依存性を抽出することができる。以下では組合せ(2)の Ranked RD 法を例に非線形システムへの応用とその問題点を紹介する。図 4.3.2 で示したように Ranked RD 法では特定の振幅範囲 R で極値となる部分サンプルを平均して RD 波形 $a_2(R; \tau)$ を求める。この操作を非線形システムに対しても形式的に適用すれば、振幅範囲 R に対応する振動特性を何らかの形で推定できるものと考えられる。このとき得られる RD 波形 $a_2(R; \tau)$ は出力の自己相関関数と異なるが、類似の性質を仮定して $a_2(R; \tau)$ を自由振動波形とみなすことにする。ただし、非線形システムに対しては入力が白色雑音であったとしても $a_2(R; \tau)$ が自由振動波形とはならないことに注意されたい。自由振動波形とみなすことの妥当性は数値シミュレーションによってのみ確認されている。容易に想像されるように、RD 波形 $a_2(R; \tau)$ には τ が十分小さい領域でのみ振幅範囲 R による選択の効果が表れる。したがって、4.4.1 項に述べる方法で減衰定数を推定するときはなるべく $a_2(R; \tau)$ の初期部分を用いることが望ましい⁵⁷⁾。

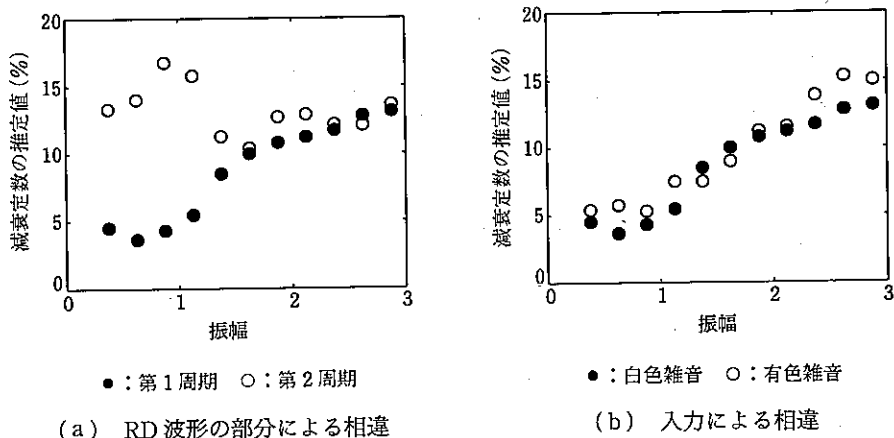


図 4.3.4 Ranked RD 法による振幅依存性の推定例

一方、システムの入力が白色雑音でない場合は前述のように $a_2(R; \tau)$ の初期部分を自由振動波形とみなし難くなる。一般に入力の自己相関関数は未知であるから、減衰定数の推定に用いる $a_2(R; \tau)$ の部分は慎重に選択しなければならない。図 4.3.4 は簡単なパイリニア型復元力特性の構造物を対象として Ranked RD 法による減衰定数の推定をシミュレートした例である。モデル構造物の弾性限界変位は 1 であり、粘性減衰は与えていない。図 4.3.4(a) は白色雑音を入力した場合の推定結果である。RD 波形 $a_2(R; \tau)$ の第 1 周期を用いて推定した場合は振幅が 1 を超える付近から減衰定数が明らかに増加していく。これに対して、 $a_2(R; \tau)$ の第 2 周期を用いて推定した場合は振幅依存性が顕著に表れていない。図 4.3.4(b) は異なる入力雑音に対する推定結果を比較したものである。減衰定数の推定には両者とも $a_2(R; \tau)$ の第 1 周期を用いており、有色雑音の自己相関関数は図 4.3.1 のように設定している。RD 波形 $a_2(R; \tau)$ の初期部分を用いたため、両者では振幅依存の様子が多少異なっている。なお、Ranked RD 法で推定される減衰定数は特定の復元力モデルと対応していないので、その解釈には十分な注意が必要である。この推定例では 1 以下の振幅でも数%の減衰定数が得られているが、この値をいわゆる微動時の減衰定数と誤解してはならない。

4.3.2 実測データから周波数応答データを推定する方法

4.1.1 項で述べたように、起振機による定常加振実験では共振曲線・位相曲線として直接周波数応答データが得られるが、常時微動測定や風応答、地震応答観測などでは実測データ（時刻歴波形）から周波数応答データ（フーリエスペクトル、パワースペクトル密度、伝達関数など）を推定する必要がある。

ここでは、最初に周波数応答データから減衰定数を評価する上でその基となる 1 質点モデルの伝達関数と共振曲線およびパワースペクトル密度の式を示す。次に実測データに対するスペクトルの推定誤差を減少させる平滑化の方法について述べ、最後に伝達関数の推定法や常時微動による伝達関数の推定に及ぼす風の影響に関し、実測例を上げて示す。

(1) 1質点モデルによる伝達関数とパワースペクトル密度

4.3.1項で述べたようにシステムの入力 $f(t)$ と応答 $x(t)$ の関係はインパルス応答関数 $g(t)$ を用いて次式のように表すことができる。

$$x(t) = g(t) \otimes f(t) \tag{4.3.15}$$

ここに、記号 \otimes は合成積を意味する。

$f(t)$ と $x(t)$ のフーリエ変換を、それぞれ $F(\omega)$ と $X(\omega)$ とすると、

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \tag{4.3.16}$$

となる。ここで系の伝達関数 $H(\omega)$ と入力、出力のフーリエ変換の関係は、合成積の関係から単なる積の関係へと変わる。なお、式中の $H(\omega)$ はインパルス応答関数 $g(t)$ のフーリエ変換である。

ここで、簡単のために図4.3.5に示すように建物を1質点で表し、建物が地盤と一緒に振動する（基礎固定）と仮定したモデルを考える。

地動（建物基礎）加速度 y に対する建物の絶対加速度 $\ddot{x} + \ddot{y}$ の伝達関数、応答倍率および位相差は以下のように表される。

絶対加速度の伝達関数：

$$H(\omega) = \frac{1 + i 2 h(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i 2 h(\omega/\omega_0)} \tag{4.3.17}$$

応答倍率：

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + 4 h^2(\omega/\omega_0)^2}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + 4 h^2(\omega/\omega_0)^2}} \tag{4.3.18}$$

位相差（位相遅れ）：

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{2 h(\omega/\omega_0)^3}{1 - (1 - 4 h^2)(\omega/\omega_0)^2} \tag{4.3.19}$$

ここに、 $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ M ：建物の質量 ω_0 ：建物の固有円振動数

$h = C/\sqrt{4MK}$ K ：建物の剛性 h ：建物の減衰定数

C ：建物の減衰係数

減衰定数 h をパラメタにして応答倍率と位相差（位相遅れ）を図4.3.6に示す。

一方、起振機加振の場合には、建物上部に起振機を設置して各振動数ごとに定常加振を行い、

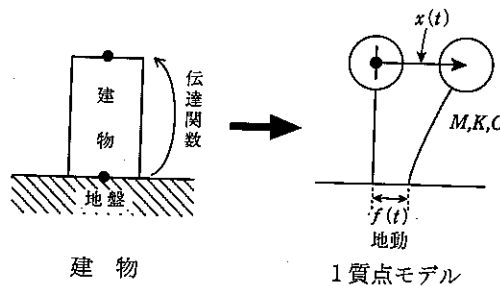


図4.3.5 建物と1質点モデルの関係

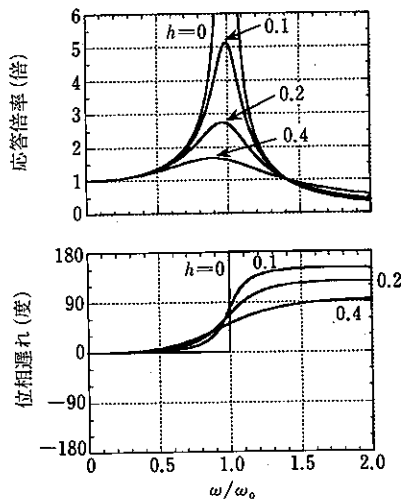


図 4.3.6 建物の伝達関数

その応答を測定するもので、結果を単位加振力当たりの応答（共振曲線・位相曲線）として示すことが多く、その場合の各式を以下に示す。なお、上部加振力の大きさは、起振機加振の場合 $m_0 r \omega^2$ ($m_0 r$ は偏心モーメント) となる。

単位加振力当たりの応答変位：

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i 2 h (\omega/\omega_0)} \frac{1}{K} \quad (4.3.20)$$

変位振幅：

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + 4 h^2 (\omega/\omega_0)^2}} \frac{1}{K} \quad (4.3.21)$$

位相差 (位相遅れ)：

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{2 h (\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (4.3.22)$$

また、入力が定常なランダム過程とみなせる場合には、建物の応答のパワースペクトル密度から振動特性を評価することも可能である。地動加速度をホワイトノイズと仮定し、そのパワースペクトル密度を S_0 とすると、建物の変位応答のパワースペクトル密度 S_r は以下の式となる。

$$S_r = \frac{1}{\omega_0^4} \frac{S_0}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + 4 h^2 (\omega/\omega_0)^2} \quad (4.3.23)$$

(2) スペクトルの平滑化⁵⁸⁾

観測データ (有限長) の解析で多く用いられている高速フーリエ変換 (FFT) の場合、生スペクトルは推定誤差が大きく、一般に激しくばらつき、特に高周波数側で著しい。これらの結果から直接振動特性を推定することは非常に難しい。ここでは、推定誤差を減らすために行われるスペクトルの平滑化について述べる。いま、定常 (エルゴード的) ガウス過程の時系列 $x(t)$ の FFT によるパワースペクトル密度 $S_x(f)$ を考える。推定パワースペクトル密度 $\hat{S}_x(f)$ の変動係

数 ϵ_r , すなわち正規化された標準偏差は, $\hat{S}_x(f)$ の標準偏差 $\sigma[\hat{S}_x(f)]$, 平均値 $\mu[\hat{S}_x(f)]$, 自由度 n を用いて以下のように表される.

$$\epsilon_r = \frac{\sigma[\hat{S}_x(f)]}{\mu[\hat{S}_x(f)]} = \sqrt{\frac{2}{n}} = 1 \quad (4.3.24)$$

つまり, FFT など直接フーリエ変換による推定スペクトルの相対誤差は記録長に無関係に 100% に及び, 記録長を増加しても単に振動数成分の数を増すに過ぎない.

実用上は, この推定誤差を減少させる方法として, 次に述べる 2 つの平滑化操作が用いられる. まず, 第 1 の方法は, 生のスペクトル推定値にスペクトルウィンドウ (平滑化ウィンドウ) を作用させて, 平滑化をする方法であり, いろいろな種類のウィンドウが提案されている. この場合の変動係数は, 平滑化の振動数幅を B_e , 全記録長を T とすると以下のように表される.

$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{1}{TB_e}} \quad (4.3.25)$$

第 2 の方法は, 全データ長 T を長さ T_m の m 個区間 (アンサンブル) に分割 ($T = mT_m$) し, それぞれの区間についてスペクトルを推定して, 各振動数ごとに m 個の平均をとる方法である. この場合の変動係数は, 以下のように表される.

$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{1}{m}} \quad (4.3.26)$$

これらの 2 つの方法は, 同等の統計処理となる.

アンサンブル平均によるスペクトルの平滑化は, 一般に常時微動による長時間の記録や地震応答観測の多数の記録 (記録ごとの平均) に対してよく用いられる.

アンサンブル平均の回数と推定精度の関係の例として, 建物上部で測定された常時微動のパワースペクトル密度から推定された減衰定数の結果を図 4.3.7 に示す. この例は 1 次振動数が約 1 Hz の RC 造 18 階建物の屋上階の記録 (各 1 時間, 6 記録) に対し, 区間時間 100 秒とし平均回数を 12, 18, 24, 36, 64 回 (64 回の場合は 50 秒ずつデータを重ね合わせて平均, その他は重ね合わせなし) と変化させた結果である. 平均回数が増加するほど, 各記録間の減衰定数のばらつきが減少していることが分かる.

このほか MEM によってスペクトルを推定することで, その推定精度が向上することが知られている. この MEM はデータ数の極めて少ない場合にも, 分解能の良い安定したスペクトルが得られる.

(3) 伝達関数の推定法

常時微動測定や地震応答観測に基づいて建物の振動特性を評価する場合に, 建物の基礎部の応答に対する建物上部の応答伝達関数を求めることが良く行われる. これは, 地盤からの振動が建物の基礎部から入力され上部へ伝播すると考えて, 建物基礎部と上部の周波数応答の比から建物のみ特性を捉えようとするものであり, 4.4.2 項で述べる方法により固有振動数や減衰定数を評価することができる. 伝達関数は一般に応答の水平成分の比から求めるが, 基礎部のロッキング成分が大きい場合にはこれらを考慮して求める⁵⁹⁾ ことも必要となる.

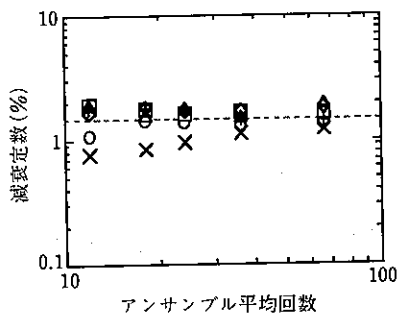


図 4.3.7 アンサンブル平均の回数と減衰定数の推定結果の関係

建物の基礎部に対する上部の伝達関数として、以下に示す 3 種類の異なる形式による推定法⁶⁰⁾が考えられる。

$$H_1(\omega) = S_{io}(\omega) / S_{ii}(\omega)$$

$$H_2(\omega) = S_{oo}(\omega) / S_{oi}(\omega)$$

$$H_3(\omega) = \sqrt{S_{oo}(\omega) / S_{ii}(\omega)}$$

ここで、 $S_{ii}(\omega)$: 建物基礎部の応答のパワースペクトル密度

$S_{oo}(\omega)$: 建物上部の応答のパワースペクトル密度

$S_{io}(\omega), S_{oi}(\omega)$: 建物基礎部と土部の応答のクロススペクトル密度

$H_1(\omega)$ は、一般的に入力-出力関係として使われており、出力に含まれる入力に無相関なノイズ成分を除去する効果が、 $H_2(\omega)$ は、逆に入力に含まれる出力に無相関なノイズ成分を除去する効果がある。なお、位相差は $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ で一致し、 $H_3(\omega)$ では伝達関数が実数であることから常に 0 となる。また、入出力成分間の線形性を表すコヒーレンス

$$\text{coh}^2(\omega) = |S_{oi}(\omega)|^2 / (S_{ii}(\omega) \cdot S_{oo}(\omega)) \quad (4.3.27)$$

を用いると、上記の 3 種の伝達関数の関係は、

$$|H_1(\omega)|^2 = H_3(\omega)^2 \cdot \text{coh}^2(\omega)$$

$$|H_2(\omega)|^2 = H_3(\omega)^2 / \text{coh}^2(\omega)$$

だから

$$|H_1(\omega)| \leq H_3(\omega) \leq |H_2(\omega)| \quad (4.3.28)$$

と表される。

図 4.3.8 に常時微動測定による 3 種の伝達関数の例を示す。これは、前記の図 4.3.7 の場合と同じ RC 造 18 階建物の地階の水平成分に対する屋上階の水平成分の伝達関数の例であり、位相差 (位相遅れ) とコヒーレンスを合わせて示してある。図中の数値は屋上階のパワースペクトル密度 $S_{oo}(\omega)$ のピーク振動数 1.0 Hz における応答倍率である。また、コヒーレンスの大小の判断基準を 0.4 としてコヒーレンスの大きな振動数領域を応答倍率の図やコヒーレンスの図に破線で示した。これらの結果から、 $H_1(\omega)$ と $H_3(\omega)$ は $S_{oo}(\omega)$ とほぼ同じ振動数でピークとなっていること、 $H_2(\omega)$ ではこの振動数でピークとなっておらず、これより高い振動数に見かけのピーク

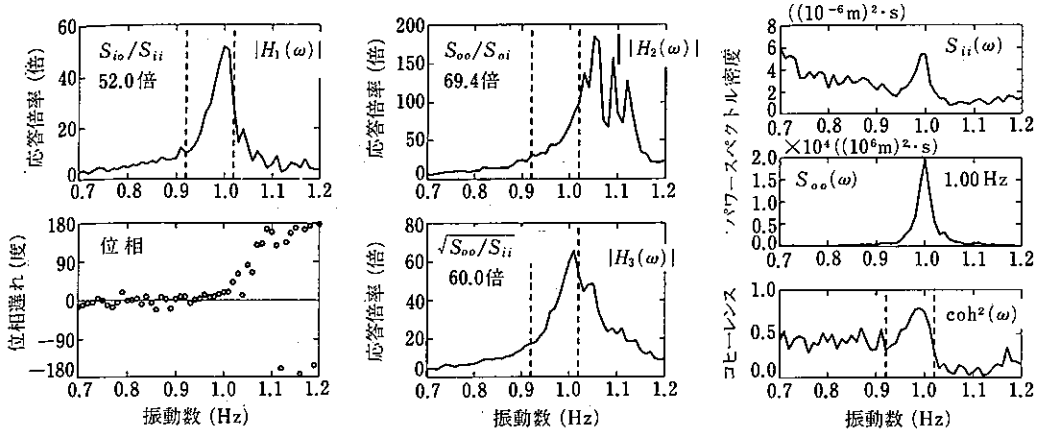


図 4.3.8 常時微動測定結果による 3 種の伝達関数

が見られること、コヒーレンスの低い範囲で $H_1(\omega)$ は応答倍率が小さいのに対し $H_2(\omega)$ は応答倍率が大きくばらつきも大きいこと、 $H_3(\omega)$ はコヒーレンスによらないため $H_1(\omega)$ と $H_2(\omega)$ の中間的な応答倍率を示すことなどが分かる。

以上の結果、構造物の基礎部と上部の伝達関数を求める場合には、後述する風の影響なども含め入力に無相関な出力成分の除去が可能な $H_1(\omega)$ の方法が適していると言える。

(4) 常時微動による伝達関数の推定に及ぼす風の影響⁶¹⁾

常時微動の構造物への入力として、主に構造物下部からの地盤振動のほか、構造物上部に作用する風外力がある。常時微動測定に当たっては、無風状態の時に実施するのが好ましいが現実的には困難である。風が伝達関数の推定に及ぼす影響を見るため、建物と基礎-地盤から成る 2 質点 2 自由度モデルを用いて、地動入力と上部入力（風外力に相当）の 2 入力と同時に作用した場合の伝達関数を考える。図 4.3.9 に上部入力の大きさを地動加速度により上部質点に生じる慣性力に対し 2~512 倍に変化させた場合の基礎に対する上部構造物の伝達関数を示した。図には、地動入力のみと上部入力のみを合わせて示したが、地動入力のみの場合が上部構造物の特性（減衰定数 $h=1\%$ ）を表す。これに上部入力を加えその大きさを増すと、応答倍率の値が増大しかつピークの裾野の幅も広がり、上部入力のみの場合に近づく。位相についても上部入力が増大するとほぼ同位相となる。このピーク応答倍率と $1/\sqrt{2}$ 法で求めた減衰定数の変化を図 4.3.10 に示したが、ピーク応答倍率や減衰定数は上部入力の大きさが地動による上部質点の慣性力と同程度以上になると過大に評価されてしまうことが分かる。図 4.3.11 には、弱風時と強風時の常時微動測定による伝達関数を示すが、図 4.3.9 の解析結果と同様な傾向を示している。従って、常時微動による伝達関数の推定においては、風の状態に注意を払う必要がある。

4.4 減衰定数の評価法

4.4.1 自由振動波形に基づく減衰定数評価法

自由振動実験の結果はもちろん、入出力の観測より推定されたインパルス応答も自由振動波形

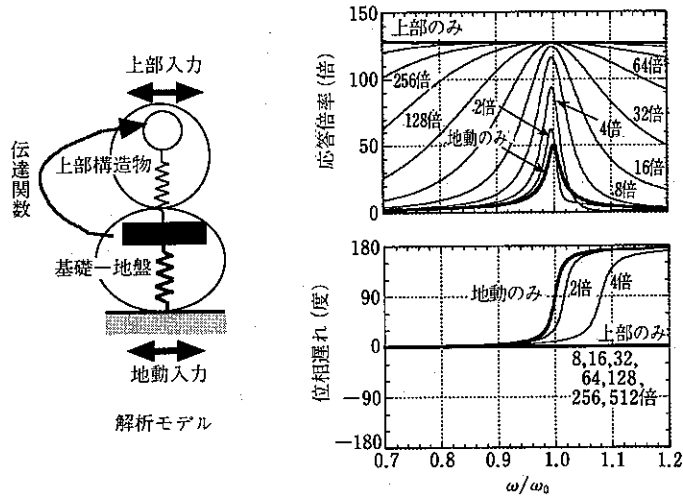


図 4.3.9 地動入力と上部入力（風外力）が作用した伝達関数

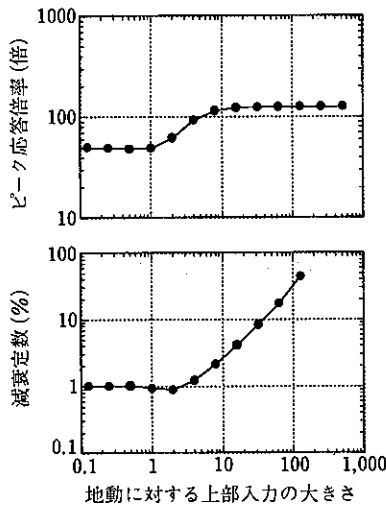


図 4.3.10 上部入力の大さきとピーク応答倍率と減衰定数の関係

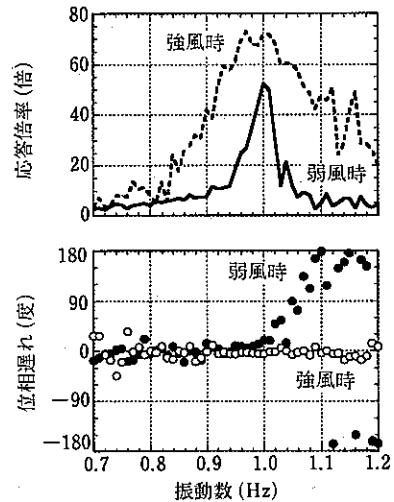


図 4.3.11 風速の違いによる実測結果の伝達関数と減衰定数の関係

である。また、場合によっては出力の自己相関関数を自由振動波形と見なすことができる。本節では、これらの自由振動波形から減衰定数を評価する方法について述べる。

雑音 $e(t)$ に乱された線形 1 自由度系の自由振動応答 $x(t)$ は一般に次式で表すことができる。

$$x(t) = A \exp(-h\omega_0 t) \cos(\sqrt{1-h^2} \omega_0 t - \phi) + e(t) \quad (4.4.1)$$

ここに、 ω_0 : 固有円振動数

h : 減衰定数

A : 振幅

ϕ : 位相

一般に雑音が白色性を持たないと推定値に偏りが生じやすくなるので注意が必要である。ここでは変動係数 $c_x(t)$ を導入して雑音の大きさを表現し、式 (4.4.1) は次のように表すことができるものとする。

$$x(t) = A \exp(-h\omega_0 t) \cos(\sqrt{1-h^2} \omega_0 t - \phi) \{1 + w(t)\} \quad (4.4.2)$$

ここに、 $w(t): \mathcal{N}(0, c_x^2(t))$ のガウス白色雑音

非線形系に対しても特別な減衰モデルを設定しない限り、等価線形化の意味において上式の減衰定数 h を推定対象とすることが多い。多自由度系の場合、特定のモードに対する自由振動波形を観測できれば理想的である。しかしながら、他のモードが混入することを避けられない場合も多く、一般には含まれるモードの数だけ式 (4.4.1) を重ね合わせた複雑な自由振動波形が得られる。各モードの減衰定数を評価するには、複雑な自由振動波形に直接フィッティングする手法と、フィルタを用いて事前に各モードを分離しておく手法が考えられる。

以下では自由振動波形から減衰定数を評価するための代表的な方法として振幅減衰比による方法と最小2乗法による方法について述べる。

(1) 振幅減衰比による減衰定数の評価

式 (4.4.2) より、時刻 t_1 とその1周期後 $t_2 = t_1 + T_0$ における振幅の比は次式で与えられる。

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \exp\left(\frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}\right) \frac{1+w(t_1)}{1+w(t_2)} \quad (4.4.3)$$

両辺の対数を取り、1次近似を用いて整理すれば次式を得る。

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \sim \mathcal{N}\left(\frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}, c_x^2(t_1) + c_x^2(t_2)\right) \quad (4.4.4)$$

これより上式左辺の対数減衰率を求めれば減衰定数 h を評価できることがわかる。通常の構造物では $h \ll 1$ を考慮して $1-h^2 \approx 1$ と近似することも多い。このとき減衰定数 h の推定値およびその推定誤差分散は次式となる。

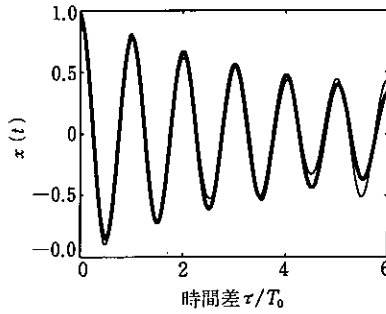
$$(h \text{ の推定値}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \quad (4.4.5)$$

$$(h \text{ の推定誤差分散}) = \frac{c_x^2(t_1) + c_x^2(t_2)}{2\pi} \quad (4.4.6)$$

実用上は周期 T_0 も同時に知る必要があるため、自由振動波形 $x(t)$ の極値に着目して $x(t_1)$ および $x(t_2)$ を読み取る。固有周期の推定誤差により、減衰定数の推定誤差分散は式 (4.4.6) よりも大きくなる。振幅減衰比による減衰定数の評価法は極めて簡便であることから広く用いられている。しかしながら、自由振動波形の極値のみに着目するため情報の利用効率は高くない。雑音量が多くなると極値の位置を特定することも困難になり評価精度は低下する。

(2) 最小2乗法による減衰定数の評価

観測雑音に関する先験的な情報がない場合、観測値について雑音を最小とするよう振動特性 ω_0 , h , A および ϕ を決定することが考えられる。最小2乗法による振動特性の決定問題は次の最小化問題である。



推定法	固有周期	減衰定数
(真値)	1.000 T_0	3.00%
最小2乗法	1.002 T_0	2.66%
振幅減衰比	1.020 T_0	4.56%

図 4.4.1 最小 2 乗法による振動特性の評価例

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^N e^2(t_i) \quad (4.4.7)$$

N 個の時刻は任意に設定することができる。上式の最小化問題は解析的な取扱いが不可能であるため、反復計算を用いた数値解法が必要となる。数値解法では局所的な極小値にとらわれて大域的な最小値が発見できない場合があるので注意しなければならない。図 4.4.1 は図 4.3.3(b) のシミュレートされた RD 波形から最小 2 乗法により振動特性を評価した 1 例である。図中の表には RD 波形の 2 周期目から振幅減衰比によって評価した値も併記した。最小 2 乗法ではそれらの値を初期値として用いている。

最小 2 乗法による減衰定数の評価精度について簡単な検討を行う。以下では簡単のために ω_0 および ψ は既知であり、変動係数 $c_x(t)$ は時刻によらず一定で c_x であるとする。 N 個の時刻が等間隔であるとき、 $1-h^2 \approx 1$ なる近似を用いれば、最終的に次の結果を得る。

$$(h \text{ の推定誤差分散}) = \frac{12 c_x^2}{2 \pi (N_e - 1) N_e (N_e + 1)} \quad (4.4.8)$$

ここに、 N_e : 推定誤差の相関を考慮した等価なサンプル時刻数

特に、 $N_e=2$ とおけば振幅減衰比による式 (4.4.6) で $c_x(t)$ を一定とした場合に一致する。実際には固有周期などの推定誤差により、減衰定数の推定誤差分散は式 (4.4.8) よりも大きくなる。最小 2 乗法による方法では自由振動波形の情報を最大限に利用できるので評価精度は高い。

4.4.2 周波数応答データに基づく減衰定数評価法

周波数応答データに対する減衰定数の評価法として、 $1/\sqrt{2}$ 法、ハーフパワー法、位相勾配法、およびカーブフィット法について述べる。

(1) $1/\sqrt{2}$ 法およびハーフパワー法

4.3.2 項 (1) に示した 1 質点モデルによる伝達関数、共振曲線やパワースペクトル密度の式から構造物の減衰定数は、その値が小さい場合には $1/\sqrt{2}$ 法⁶²⁾ やハーフパワー法を用いて近似的に求めることが可能である。図 4.4.2 にこれらの方法による減衰定数 h の求め方を示す。

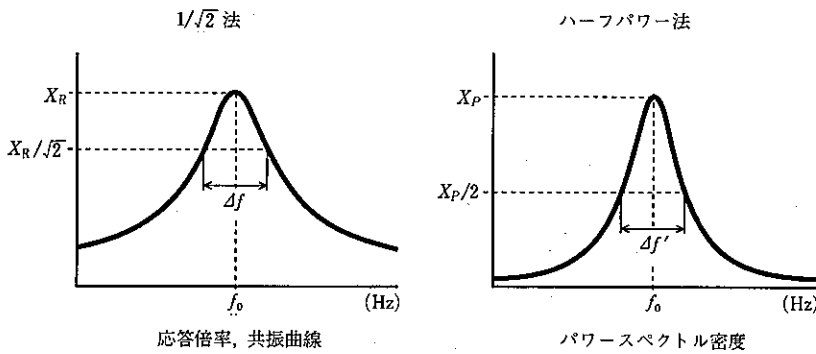
4.3.2項(1)に示した1質点系の応答倍率から $1/\sqrt{2}$ 法で求めた減衰定数と真値の関係を図4.4.3項に示すが、減衰定数の増加と共に推定誤差が増加する。真値が0.4では誤差は25%程度と大きい、0.1の場合は2%程度と小さい。減衰定数の推定精度は、むしろ実測結果から得られたスペクトルの周波数分解能やデータのばらつきに依存すると言える。

(2) 位相勾配法⁶³⁾

位相勾配法は、減衰定数が大きく共振曲線のピークの幅が広がり $1/\sqrt{2}$ 法では減衰定数の評価が困難な場合に有用な減衰定数の評価法である。

4.3.2項(1)に示したように1質点モデルの共振機加振による位相の遅れ ψ は、以下の式で表される。

$$\psi(f/f_0) = \tan^{-1} \frac{2h(f/f_0)}{1-(f/f_0)^2} \quad (4.4.9)$$



f_0 : ピーク振動数

$$h \approx \frac{\Delta f}{2f_0} \quad (\text{応答倍率, 共振曲線の場合})$$

$$h \approx \frac{\Delta f'}{2f_0} \quad (\text{パワースペクトル密度の場合})$$

図4.4.2 $1/\sqrt{2}$ 法およびハーフパワー法による減衰定数の求め方

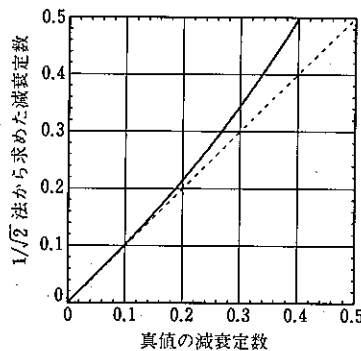


図4.4.3 減衰定数の真値と $1/\sqrt{2}$ 法による減衰定数の関係

その位相曲線を図 4.4.4 に示す。図から減衰定数 h の値に関わらず $ff_0=1$ では、必ず位相の遅れが 90° となることが分かる。 $ff_0=1$ の時の位相曲線の変化率 $\dot{\psi}(1)$ は減衰定数の逆数となる。つまり

$$\dot{\psi}(1)=1/h \tag{4.4.10}$$

従って、 h は

$$h=\frac{1}{\dot{\psi}(1)}=\frac{1}{f_0} \frac{\Delta f}{\Delta \psi} \tag{4.4.11}$$

となり、図 4.4.5 に示すような勾配で減衰定数が求められる。この意味で、本方法は位相勾配法と呼ばれる。

(3) カーブフィット法

カーブフィット法は、スペクトルの分解能が不足しピーク振動数を逃している場合やデータのばらつきが大きい場合など、 $1/\sqrt{2}$ 法やハーフパワー法による減衰定数の評価が困難な場合に有効である。

カーブフィット法としては、最小 2 乗法によりモデルの伝達関数、共振曲線・位相曲線、パワースペクトル密度などの理論曲線をデータに直接当てはめる方法や理論曲線を複素数表示して当てはめる方法の 2 種がある。

(i) 最小 2 乗法による理論曲線への当てはめ

4.3.2 項(1)に示した 1 質点モデルによる理論曲線（伝達関数、共振曲線やパワースペクトル密度など）と実測結果による各振動数ごとの残差 2 乗和が最小となるようなモデルの固有振動数 f_0 や減衰定数 h を求める方法であり、実測結果で各次モードの分離が可能であれば高次振動についても適用可能である。また、モードの分離が困難な場合には、直接、多自由度系モデルの理論曲線に当てはめることも行われる。

図 4.4.6 に RC 造 18 階建物の常時微動による地下階に対する屋上階の伝達関数（応答倍率）と屋上階のパワースペクトル密度に適用した例を示す。図中の実線がカーブフィット法の結果である。

(ii) 複素数表示による理論曲線への当てはめ

振動数刻みが粗くピーク振動数を逃している場合に有効な方法で、1 質点モデルによる理論曲

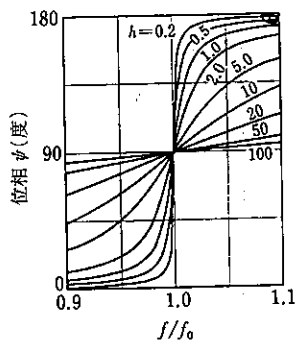


図 4.4.4 位相曲線

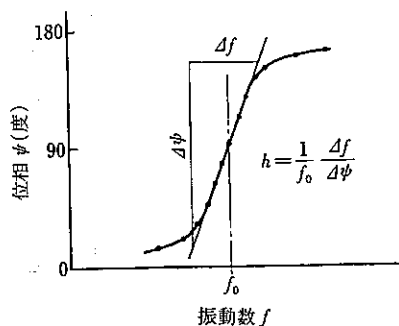


図 4.4.5 位相曲線による減衰定数の求め方

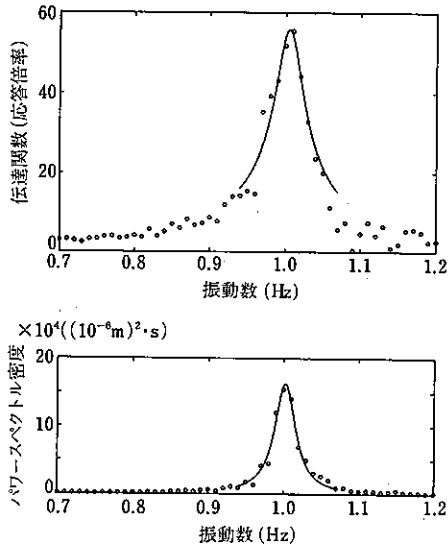


図 4.4.6 伝達関数とパワースペクトル密度へのカーブフィット法の適用例

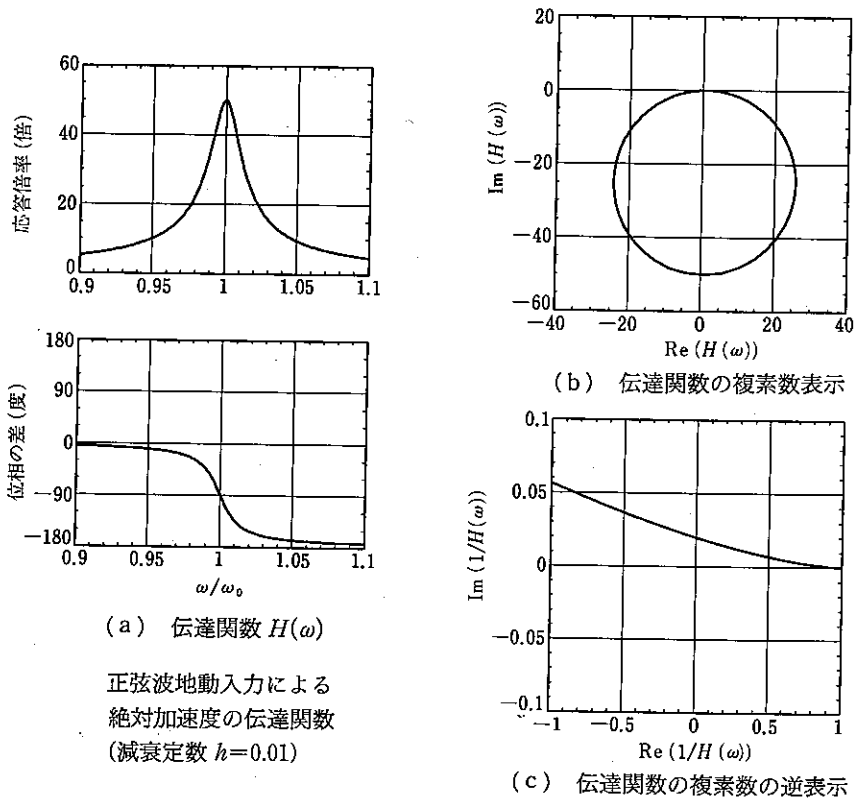
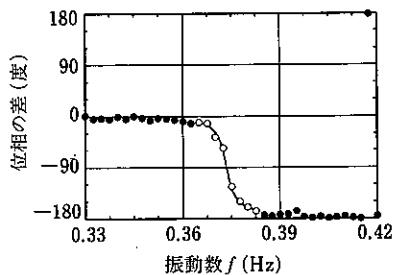
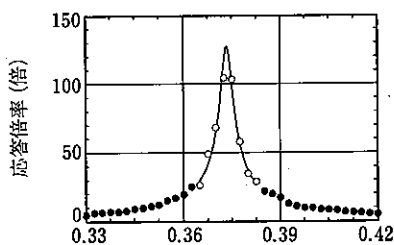
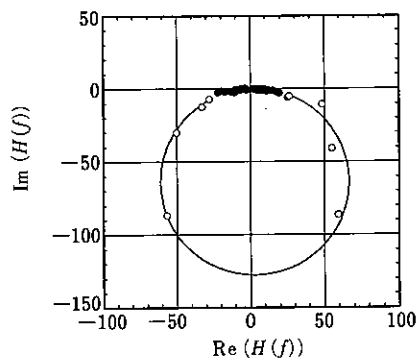


図 4.4.7 1質点モデルの絶対加速度の伝達関数とその複素数表示

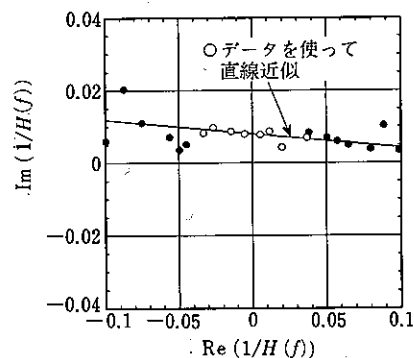


(a) 伝達関数 $H(f)$

S造 28 階建物の地下 4 階
に対する 28 階の伝達関数



(b) 伝達関数の複素数表示



(c) 伝達関数の複素数の逆数表示

図 4.4.8 常時微動による伝達関数の振動数補間の例

線の複素数表示 (ナイキスト線図) が近似的に円になることや複素数の逆数 (逆ナイキスト線図) が直線に近似されること⁶⁴⁾ を利用するものである。

図 4.4.7 に、1 質点モデル ($h=1\%$) の地動に対する絶対加速度の伝達関数とその複素数表示および複素数の逆数表示を示した。同図(c)の複素数の逆数表示が直線となっていないため同図(b)の複素数表示が厳密には円とはならないが、逆数表示の実部が 0 近傍 (ピーク振動数近傍) の範囲に限れば直線近似が可能で複素数表示も円で表せられる。また、逆数表示の実部や虚部と振動数との関係が求められることから伝達関数の応答倍率や位相差の振動数補間が可能となる。

実測例として、図 4.4.8 に S 造 28 階建物の常時微動による伝達関数を示す。伝達関数は 5 時間間の測定データを 400 秒間ずつ 45 区間に分割しアンサンブル平均により求めている。従って振動数刻みは 0.0025 Hz と細かいが、伝達関数の応答倍率や位相差を見るとピーク振動数が捉えられていない。同図(c)に示すように複素数の逆数表示の実部が 0 付近のデータ (図中の○) を直線近似することにより、複素数表示でデータに適合した円 (同図(b)の実線) が求められ、さらに応答倍率および位相差の振動数の補間 (同図(a)の実線) ができる。このように振動数刻みが等間隔であっても、伝達関数や共振曲線およびその複素数表示では共振点付近で図上のデータ間隔が粗くなるのに対し、逆数表示ではその間隔が細くなるため、より精度の良い補間が期待できる (各図中の○印によるプロットに注目)。