

沖積平野または堆積盆地内で発生する LOVE 波を 合成する解析手法

AN ANALYTICAL METHOD FOR LOVE WAVE FIELD GENERATED IN ALLUVIAL VALLEY AND SEDIMENTARY BASIN

久田嘉章*, 山本俊六**, 谷 資信***
Yoshiaki HISADA, Shunroku YAMAMOTO and Sukenobu TANI

An analytic method is proposed for Love wave field generated at a vertical interface between two 2-D elastic quater-spaces; one homogeneous and the other multi-layered (see Fig. 1). The incident field is a plane SH-wave whose amplitude varies with depth, propagating horizontally in the first quarter. The Love wave transmitted into the second quarter is expressed using the Representation Theorem and the normal mode solution of the Love wave. When imposing continuity condition for displacement and traction at the vertical interface, the diffracted waves in the first quarter and the body waves in the second quarter are neglected. The integration along the vertical interface is analytically performed, assuming constant amplitude of the incident wave within each layer at the interface, and using the fact that the amplitude of the normal mode solution decreases exponentially, which guarantees rapid convergence of the intergral. To check the accuracy of our solution, we have computed theoretical seismograms at stations along the free surface of two sedimentary basins embedded in a homogeneous half-space for the case of incident SH-waves from a shallow dislocation source (see Fig. 2). Results are in excellent agreement with the corresponding results by the boundary element method, with the advantage that the proposed method requires much less computational time (see Figs. 4 and 6).

Keywords : alluvial valley, sedimentary basin, Love wave, Representation theorem, normal mode, dislocation source

1. まえがき

1985年のメキシコ地震の際のメキシコ市で示され、また関東平野、大阪平野、京都盆地などでしばしば観測されるように、沖積谷や堆積盆地では地震の際、実体波が増幅されるばかりでなく表面波が発生し、特に『やや長周期(約一秒から十数秒)』で重要な成分となる(例えば^{1)~4)})。堆積層内で増幅する実体波は、妹沢⁵⁾、金井⁶⁾らの重複反射理論以降、長い歴史があり、特にHaskell⁷⁾に代表されるマトリックス法を用いれば多層地盤も解析的に評価できる。それに対して堆積層内で発生する表面波は、近年になって重要性が認識されたばかりであり、また二・三次元的に不均質な媒質内での現象を扱う必要上、解析手法が適用しにくいので、それを評価するにはAki-Larnar法、有限要素法、境界要素法などの数値解析手法によらざるを得ないのが現状である(例えば^{3), 4), 7), 8)})。数値解析手法は、現実的な多層の媒

質を扱うと膨大な計算時間が必要で、特に短周期波動が長距離伝播する問題を解くことは不可能に近い。したがって、この種の表面波を定量的に評価するためには、解析的な手法が必要となる。

沖積谷や堆積盆地、または海洋型から大陸型へ地殻が変化する領域に代表される、水平方向の物性変化によって生じる表面波を扱った解析・半解析的手法として、以下に示す手法が知られている。まず樋口¹⁰⁾、佐藤¹¹⁾は、異種の成層地盤が、鉛直面で接する地盤内を伝播するLove波を扱う解析的手法を示した。しかし、この手法はある特殊な条件(樋口の条件¹⁰⁾)下でのみ成り立ち、また単層の地盤を対象としているため、多層の堆積盆地における地震動を評価することはできない。一方、Kennett¹²⁾は、水平に不連続な多層の成層地盤内を伝播する地震波を解析的に扱える手法を示した。しかし不連続とした地盤は一層のみであるため、やはり一般的な堆

* 早稲田大学 助手
** 早稲田大学 大学院生
*** 早稲田大学 教授・工博

Research Assistant of Waseda University
Graduate Student of Waseda University
Professor of Waseda University, Dr. Eng.

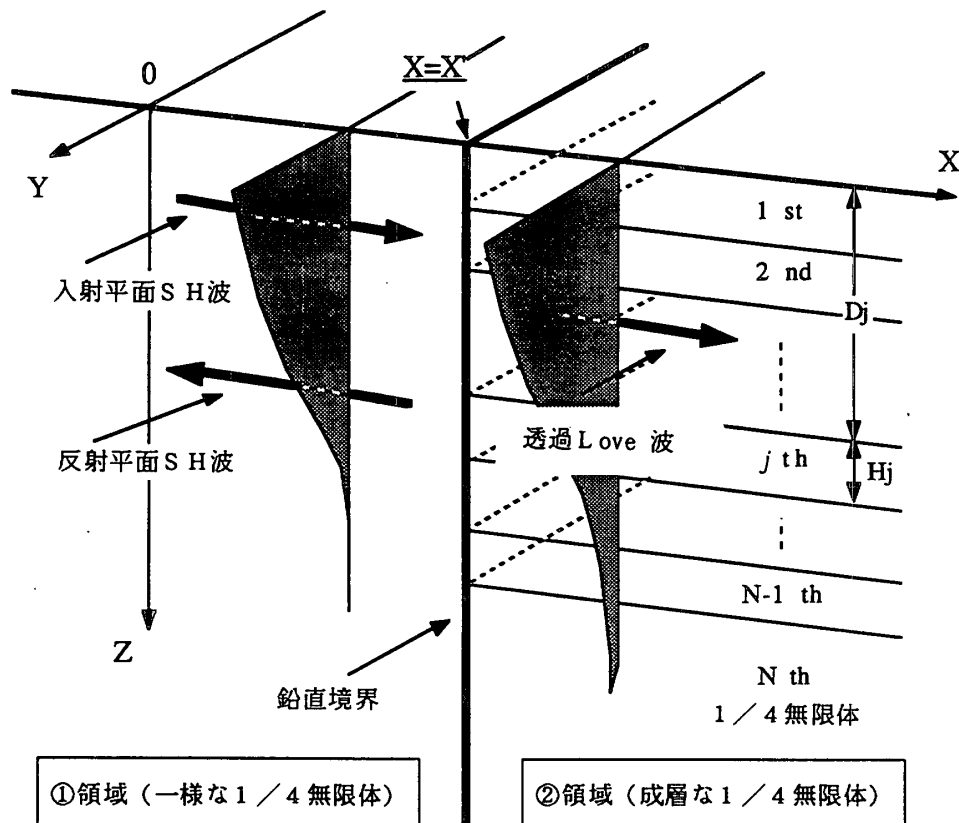
積盆地は扱えない。次に Alsop¹³⁾ は、Love 波をモード分解し、変分法を用いることから、2つの異種の多層地盤が鉛直境界で接する媒体内を伝播する Love 波を扱う半解析的手法を示した。この手法は実用的である反面、実体波の影響を無視している点と、鉛直境界での境界条件を厳密に満足していない点で近似的であり、精度が著しく悪化する場合があることが知られている¹⁴⁾。Its と Yanovskaya¹⁵⁾ は類似の問題に対して、境界積分法を用い近似解を示した。この手法は、基盤と堆積層の剛性比があまり大きくない場合に有効であるとしている。一方、実体波の影響を考慮した近似手法として、Niazy と Kazi¹⁶⁾、Buckchin と Levshin¹⁷⁾ の手法がある。しかし前者は単層地盤しか扱えず、一方、後者は収束計算が必要な数値解析手法であり、かなりの計算時間を要する。また Regan と Harkrider¹⁸⁾ は、Harkrider¹⁹⁾ による正規モード理論と有限要素法を、境界積分法を用いて組み合わせ、水平に不均質な多層の地盤内を伝播する表面波を扱う半解析的手法を示した。しかしこの手法では、正規モードで得られた入射波を強制変位入力として FEM 領域に代入し、それ以降の解析では FEM 領域内で発生する反射波が再び入射領域に透過する影響を無視している。このため反射波が余り大きくないと考えられる領域を対象とした場合のみ、有効であると考えられる。

以上のことから本論文の目的は、多層の沖積谷や堆積盆地内で発生する Love 波を、定量的かつ簡便に評価す

る解析的手法を提案し、その妥当性を検討することにある。ここで対象とする地盤は、図—1 に示すように二次元で、入射領域（周辺基盤）は一様な 1/4 無限体、また透過領域（堆積層+最下層の基盤）は水平成層な 1/4 無限体とし、両領域は鉛直面で接続されているとする。入射波は、水平方向に伝播する平面 SH 波とし、反射波も平面 SH 波、透過波は Love 波と仮定する。そして境界積分法と正規モード理論を用い、入射波により発生した透過領域の Love 波を解析的に求める。既往の研究で扱われているような Love 波入射・反射の場合と異なり、ここで扱う SH 波の入射・反射の場合は、入射・反射波と透過波の間にモード間の連成が生じず、変分法などの手法を用いずに、変位・応力の連続条件から解析解を直接求めることができる。ただし定式の際、後述するように反射領域で発生する回折波と、透過領域で発生する実体波の影響を無視する。本論文では、始めに本手法の定式を詳述し、次に本手法と境界要素法による結果¹⁾との比較、さらに実体波の影響を調べるため重複反射理論による結果との比較を行い、本手法の妥当性を調べる。なお本手法は、著者が先に提案した近似手法²⁰⁾をより厳密に定式し直したものである。

2. 沖積谷または堆積盆地内で発生する Love 波を解析的に合成する手法

図—1 に示すように対象とする二次元領域は、入射側



図—1 本手法で対象となる地盤モデルの説明図

の基盤である①領域（一様な1/4無限体）と、透過側の堆積層とその下の基盤である②領域（ $N-1$ 層からなる成層な1/4無限体）から成り、 $X=X'$ にある鉛直境界を境にして両領域が接続されているとする。入射波は、深さ方向に振幅変化が可能な平面SH波とし、領域①を水平に伝播する。鉛直境界で発生する反射波も、領域②の各層の角点（鉛直境界と各層間の境界とがなす交点）で発生する回折波を無視すると平面SH波と見なせる。また実体波の寄与を無視すると、透過波はLove波のモードの重ね合わせで表せる。時間依存の項を $\exp(i\omega t)$ とすると、入射波 V_1^i 、反射波 V_1^r 、透過波 V_2 はそれぞれ次式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} V_1^i(X, Z) &= \hat{V}_1^i(Z) \cdot e^{-i \cdot k_1 \cdot (X-X')} \\ V_1^r(X, Z) &= \hat{V}_1^r(Z) \cdot e^{+i \cdot k_1 \cdot (X-X')} \\ V_2(X, Z) &= \sum_{j=0}^M \hat{V}_2^j(Z) \cdot e^{-i \cdot k_2^j \cdot (X-X')} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 \hat{V}_1^i と \hat{V}_1^r は、それぞれ V_1^i と V_1^r の振幅、 \hat{V}_2^j は j 次モードのLove波の振幅、 M は対象としている周期で存在する最高次のモード、 i は虚数である。また K_1 と K_2^j それぞれ領域①と②での波数であり、 K_1 は ω/β_1 、 K_2^j は ω/C^j で与えられる。 β_1 は領域①のせん断波速度、 C^j は②領域の j 次モードのLove波の位相速度であり、Appendix (A) のLove波の特性方程式(A-2)から求まる。

(1) 式から、 $X=X'$ の鉛直境界における変位は次式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} V_1^i(X', Z) &= \hat{V}_1^i(Z) \\ V_1^r(X', Z) &= \hat{V}_1^r(Z) \\ V_2(X', Z) &= \sum_{j=0}^M \hat{V}_2^j(Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

一方、鉛直境界での表面応力は、

$$\left. \begin{aligned} P_1^i(X', Z) &= +\bar{\mu}_1 \cdot V_{1,x}(X', Z) \\ &= -i \cdot \bar{\mu}_1 \cdot k_1 \cdot \hat{V}_1^i(Z) \\ P_1^r(X', Z) &= +\bar{\mu}_1 \cdot V_{1,x}(X', Z) \\ &= +i \cdot \bar{\mu}_1 \cdot k_1 \cdot \hat{V}_1^r(Z) \\ P_2(X', Z) &= -\mu_2(Z) \cdot V_{2,x}(X', Z) \\ &= +i \cdot \mu_2(Z) \sum_{j=0}^M k_2^j \cdot \hat{V}_2^j(Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 P_1^i 、 P_1^r 、 P_2 は、それぞれ V_1^i 、 V_1^r 、 V_2 に対応する表面応力、 $\bar{\mu}_1$ と μ_2 はそれぞれ領域①と②におけるせん断剛性、上付きバーは一定値であることを意味する。 x は X 軸方向の偏微分である。

$X=X'$ の鉛直境界における変位と応力の連続条件から、変位 V_1^i 、 V_1^r 、 V_2 と表面応力 P_1^i 、 P_1^r 、 P_2 には次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} V_1^i(X', Z) + V_1^r(X', Z) &= V_2(X', Z) \\ P_1^i(X', Z) + P_1^r(X', Z) + P_2(X', Z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

次に、②領域に表示定理（例えば²¹⁾）を適用し、②領

域内の点 (ξ_1, ξ_2) における変位を、鉛直境界における変位 V_2 と応力 P_2 で表示する。

$$\begin{aligned} V_2(\xi_1, \xi_2) &= \int_0^\infty \{ V_2^*(X', Z; \xi_1, \xi_2) \cdot P_2(X', Z) \\ &\quad - P_2^*(X', Z; \xi_1, \xi_2) \cdot V_2(X', Z) \} dZ \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 V_2^* は半無限の成層弾性体のGreen関数（ソース点 (ξ_1, ξ_2) に単位加振した時の観測点 (X', Z) の変位）、 P_2^* は同境界応力である。Green関数を自由表面条件と放射条件を満足するように選ぶと、境界積分は(5)式のように、 $X=X'$ の鉛直境界に沿った、 Z に関する積分のみ考慮すれば良いことに注意されたい。

次に(5)式中のGreen関数 V_2^* 、 P_2^* の内、正規モード、すなわちLove波の寄与を求める。成層地盤のGreen関数は、無限長の積分区間を持つ波数積分で表され（例えば¹⁹⁾）、一般にそれを計算するのに多大な時間を要する。それに対して正規モード解は、波数平面上のLove波の極に関する留数定理を用いればGreen関数から容易に、かつ解析解として求められる。正規モード解を V_2^j 、同境界応力を P_2^j とすると、それらは次式で与えられる（Appendix (A)）。

$$\left. \begin{aligned} V_2^j(X', Z; \xi_1, \xi_2) &= -i \sum_{m=0}^M \frac{A_L^m(Z; \xi_2)}{k_2^m} \cdot e^{-i \cdot k_2^m \cdot (X' - \xi_1)} \\ P_2^j(X', Z; \xi_1, \xi_2) &= -\mu_2(Z) \cdot V_{2,x}(X', Z; \xi_1, \xi_2) \\ &= -\mu_2(Z) \sum_{m=0}^M A_L^m(Z; \xi_2) \cdot e^{-i \cdot k_2^m (\xi_1 - X')} \\ &\quad (\xi_1 > X') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 A_L^m は m 次モードの振幅の関数であり、具体的な内容はAppendix (A) の(A-3)式に示す。

(2)、(3)両式の V_2 、 P_2 と、(6)式の正規モード解を(5)式に代入すると、②領域内の点 (ξ_1, ξ_2) におけるLove波 V_2 が得られる。

$$\begin{aligned} V_2(\xi_1, \xi_2) &= 2 \sum_{m=0}^M \int_0^\infty \{ \mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_2) \cdot \hat{V}_2^m(Z) \\ &\quad \cdot e^{-i \cdot k_2^m (\xi_1 - X')} \} dZ \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

上式では、次式のLove波の直交関係を用いた（例えば¹³⁾）。

$$\int_0^\infty \{ \mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_2) \cdot \hat{V}_2^j(Z) \} dZ = 0, \quad (m \neq j) \dots\dots\dots (8)$$

次に、鉛直境界における応力と変位の連続条件の式(4)を用いて、(7)式中の透過波の変位 \hat{V}_2^m を、入射波の変位 \hat{V}_1^i で表す。(4)式の第一式に(2)式を代入し、 $\mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_2)$ を乗じ、また同第二式に(3)式を代入し、 $A_L^m(Z; \xi_2)$ を乗じる。さらに両式の Z に関し、0から無限大まで積分し、(8)式の直交関係を用いると次式を得る。

$$\int_0^\infty \{\mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_3) \cdot \hat{V}_2^m(Z)\} dZ$$

$$= \int_0^\infty [\mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_3) \cdot \{\hat{V}_1^m(Z) + \hat{V}_2^m(Z)\}] dZ$$

$$= \frac{k_1}{k_2} \cdot \bar{\mu}_1 \int_0^\infty [A_L^m(Z; \xi_3) \cdot \{\hat{V}_1^m(Z) - \hat{V}_2^m(Z)\}] dZ$$

.....(9)

(9) 式から次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_1^m(Z) &= R^m(Z) \cdot \hat{V}_1^m(Z) \\ \hat{V}_2^m(Z) &= T^m(Z) \cdot \hat{V}_1^m(Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} R^m(Z) &= \frac{1 - B^m(Z)}{1 + B^m(Z)} \\ T^m(Z) &= \frac{2}{1 + B^m(Z)} \\ B^m(Z) &= \frac{\mu_2(Z) \cdot k_2^m}{\mu_1 \cdot k_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

(10) 式中、 R^m と T^m はそれぞれ反射係数と透過係数に相当する。

(9), (10) 式を (7) 式に用いると、②領域内で発生する Love 波が入射波 \hat{V}_1^m で表示される。

$$V_2(\xi_1, \xi_3) = 2 \sum_{m=0}^M \int_0^\infty \{\mu_2(Z) \cdot A_L^m(Z; \xi_3) \cdot T^m(Z) \cdot \hat{V}_1^m(Z)\} dZ \cdot e^{-i \cdot k_2^m(\xi_1 - X')}$$

.....(12)

最後に、(12) 式の積分を解析的に実行する。まず積分路 Z を堆積層部分 ($N-1$ 層) と基盤部分に分け、堆積層部分は各層ごとに分割し、基盤部分は幾つかの任意の厚さを持つ層に分割する。次に分割した各層内で、

剛性 μ_2 と透過係数 T^m は一定であるため積分の外に出し、さらに入射変位の振幅 \hat{V}_1^m も各層内で深さ方向に一定であると仮定し積分の外に出す。短周期を扱い、各層内で入射波の振幅が一定と見なせないときは、各層を更に細かく分割し、同様の手順で定式化する。以上の操作から次の解析解を得る。

$$V_2(\xi_1, \xi_3) = 2 \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{N-1+N_b} \bar{\mu}_{2j} \cdot \bar{T}_j^m \cdot \Delta A_{Lj}^m(\xi_3) \cdot \bar{V}_{1j}^m \cdot e^{-i \cdot k_2^m(\xi_1 - X')}, (\xi_1 > X') \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 $\bar{\mu}_{2j}$, \bar{T}_j^m , \bar{V}_{1j}^m はそれぞれ j 層のせん断剛性、透過係数、入射変位である。また ΔA_{Lj}^m は、 j 層内での A_L^m に関する積分値であり、解析的に求まる (Appendix (B) の (B-2) 式)。 N_b は基盤部分を分割した層数であり、この値は、正規モード解の振幅 A_L^m が深さ方向に指数関数として減少するため、ある有限な値で打ち切れる (Appendix (A) の (A-11) 式を参照)。

(13) 式を用いた Love 波の合成は、以下の手順で行う。

- ① Appendix (A) の特性方程式 (A-2) を用い、必要な周波数における各モードの Love 波の波数 K_2^m または位相速度 C^m を計算する。
- ② 底部基盤を任意の厚さを持つ N_b 個の層に分割し、各層の中心点での入射波の変位 \bar{V}_{1j}^m を求める。
- ③ 積分値 ΔA_{Lj}^m を Appendix (B) の (B-2) 式より、透過係数を \bar{T}_j^m を (11) 式より、それぞれ計算し、
- ④ 各値を (13) 式に代入し、任意の点 (ξ_1, ξ_3) における Love 波 V_2 を得る。

3. 本手法の妥当性の確認

本手法の妥当性を確認するため、図-2 に示すモデル

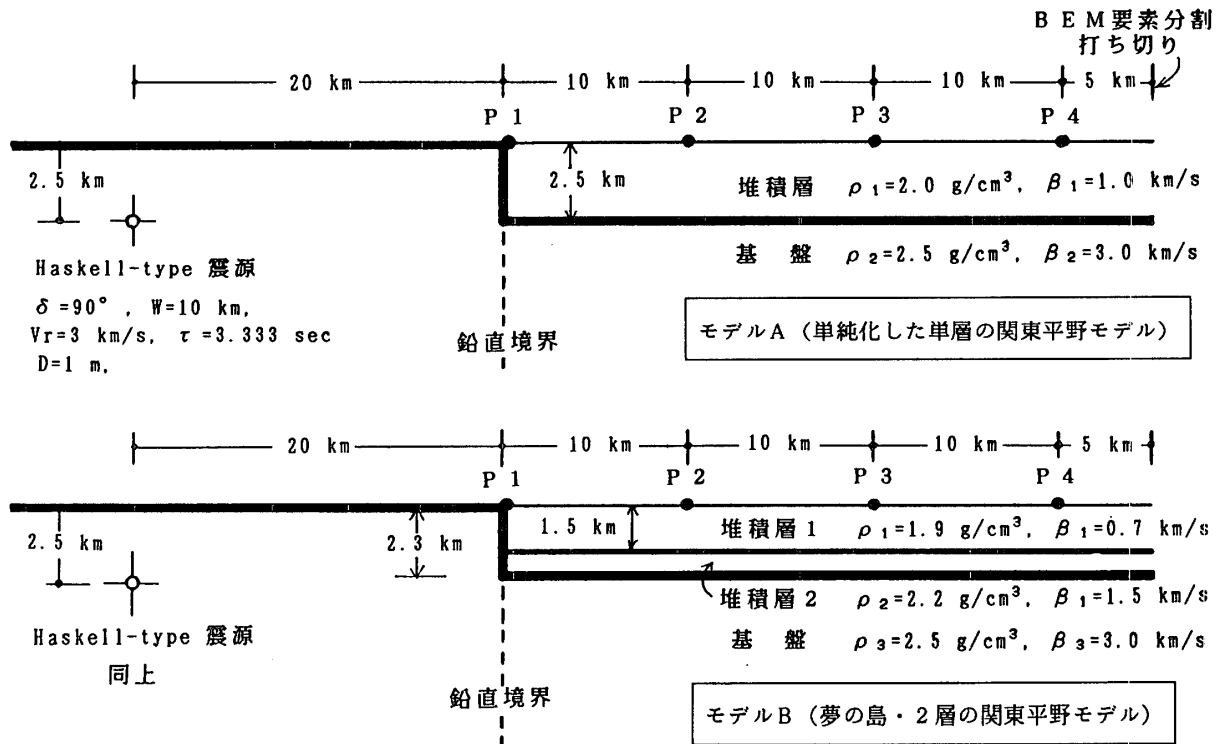


図-2 精度チェック用の堆積盆地モデル

を用い、本手法と、境界要素法 (BEM) による数値解析結果⁴⁾、さらに参考のため重複反射理論⁷⁾による結果との比較を行う。BEM を用いると、Love 波と実体波を含む全体の波動場が得られるため、本手法の妥当性の範囲がチェックできる。また重複反射理論によって、実体波のみの寄与を近似的ながら評価でき、同時に重複反射理論の適用限界も調べられる。入射波は、浅い震源から発生する SH 波とし、震源モデルとして図-2 の震源パラメータを持つ二次元の Haskell タイプの食い違い震源モデルを用いる⁴⁾。堆積盆地モデルは、関東平野を単純化した単層地盤モデル⁴⁾ (モデル A) と、夢の島爆破実験で明らかにされた夢の島・二層地盤モデル²²⁾ (モデル B) の二種類を用いる。本手法を用いる際、基盤部分の分割は、厚さ 2.5 km の 10 個の層に分割し ($N^b=10$)、また、各層の中心点での入射波の変位 V_1 は、半無限体の基本解を用い解析的に求める (求め方は文献 4) を参照)。一方、重複反射理論による合成波は、震源から観測点直下の基盤面までの入射波を全無限体の基本解を用い計算し、Haskell 法⁷⁾から堆積層による増幅率を求め、両者乗じて計算する。すべての計算は周波数領域で行い、円振動数 0.05 から 1.8 (rad/sec) まで、0.05 間隔の 36 個の値を計算し、高速フーリエ変換 (FFT) から時間領域の波動を求める。

堆積層上の各観測点 (P1 から P4、図-2 参照) にお

ける速度波形とフーリエ振幅スペクトルを各々の手法で求め、図-3 から 6 にその比較を示す。図-3 が、モデル A に対する BEM と重複反射理論による結果の比較、図-4 が BEM と本手法の比較である。同様に、モデル B に対する BEM と重複反射理論の比較、BEM と本手法の比較が、それぞれ図-5 と 6 に示されている。図中、BEM 波形 (破線) の末端部にみられる乱れは、堆積盆地モデルの右端部の境界条件を完全に満たしていないことから発生したエラーである (図-2 に示すように要素分割を P4 の右 5 km の所で打ち切っているため、ここから小さな反射波が発生した)。したがって、BEM のフーリエスペクトルにも若干の乱れが見られる。

図-3 と図-5 から重複反射理論 (実線) によって、モデル A, B ともに BEM 波形の前半部は比較的良く再現され、この部分が実体波であることが確認される。しかし、それ以降の後続波の再現は全くできず、フーリエスペクトルも過小に評価している。一次元的な重複反射理論では、堆積盆地の地震動を過小に評価することは、すでに多くの研究で明らかにされている (例えば^{3), 4), 8)}。なお P1 点で両手法の結果の一致は悪いは、この観測点が鉛直境界 (盆地端部) のすぐ脇にあり、ここから水平に入射した波が支配的になるためである。

図-4 と 6 から本手法によって、モデル A, B ともに、BEM 波形の前半部 (実体波部分) には若干の差がでて

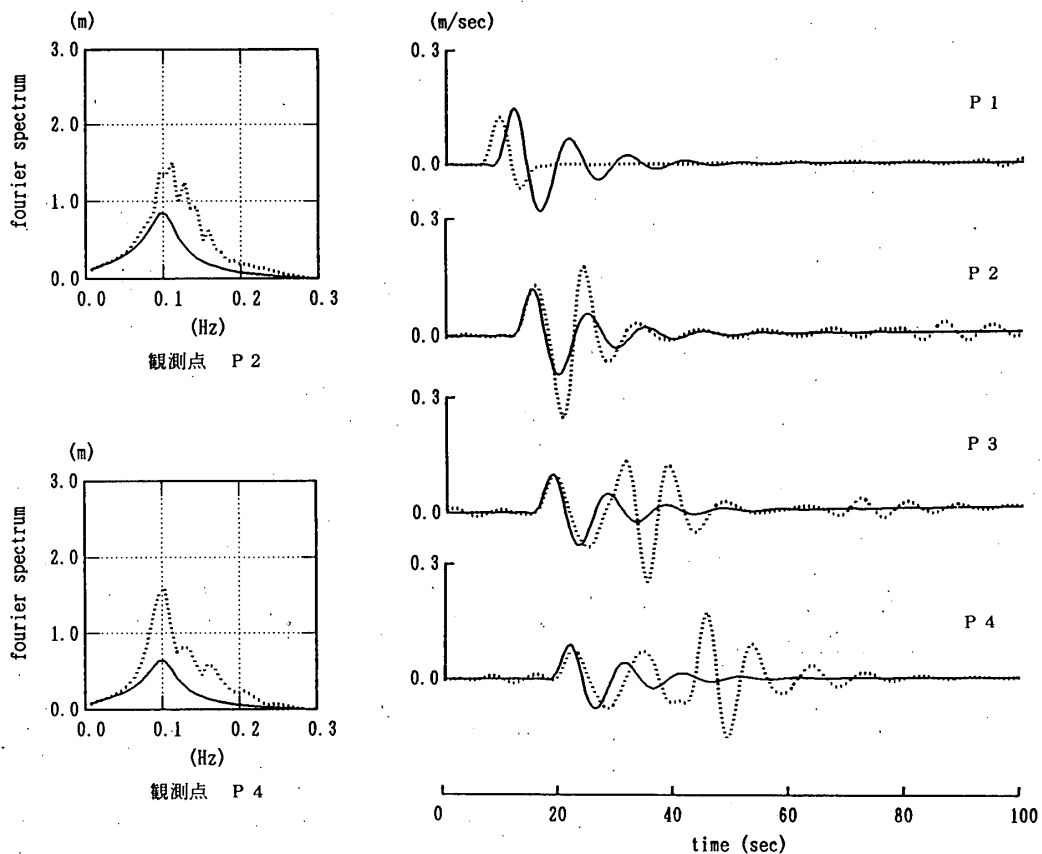


図-3 重複反射理論 (実線) と BEM (破線) による速度波形・フーリエ振幅スペクトルの比較 (図-2 のモデル A)

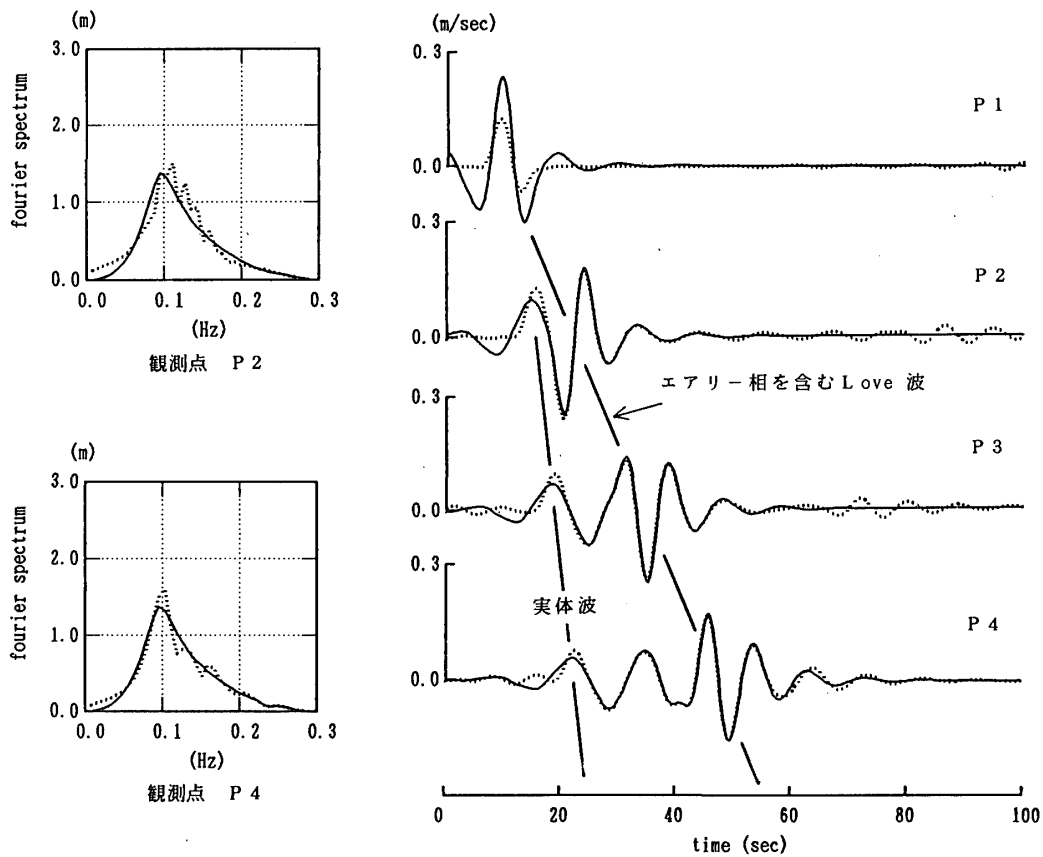


図-4 本解析手法(実線)とBEM(破線)による速度波形・フーリエ振幅スペクトルの比較(図-2のモデルA)

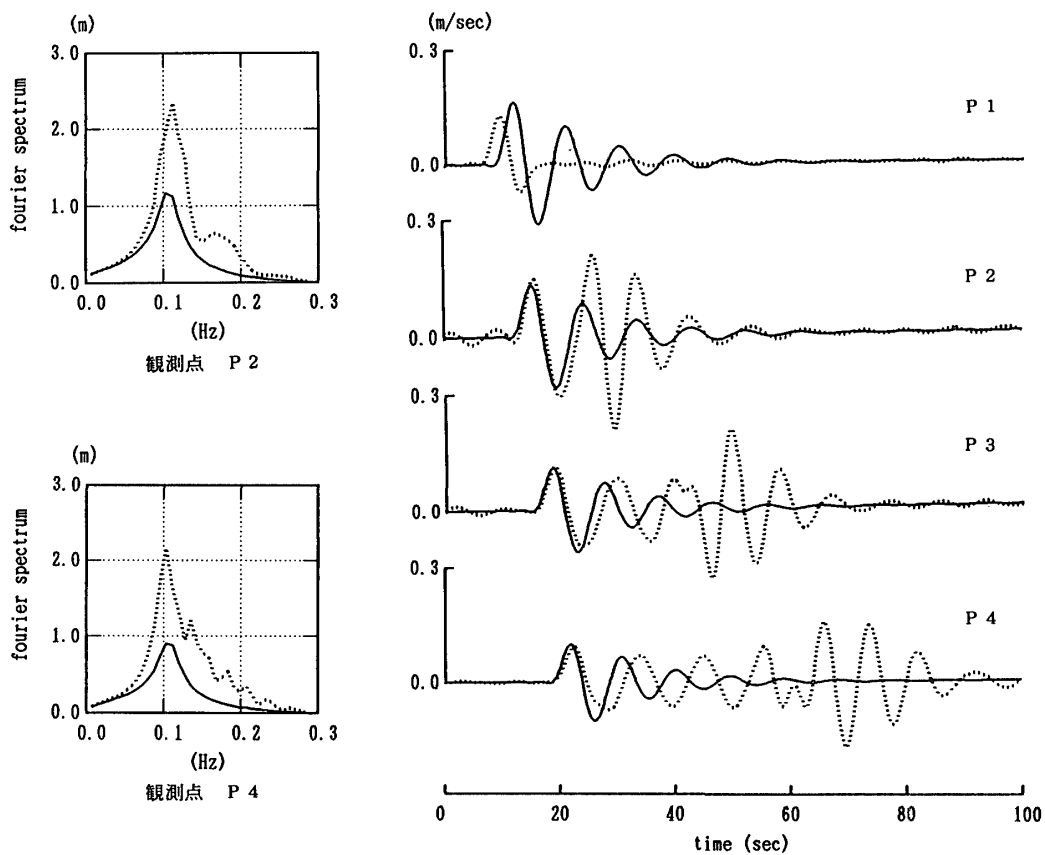


図-5 重複反射理論(実線)とBEM(破線)による速度波形・フーリエ振幅スペクトルの比較(図-2のモデルB)

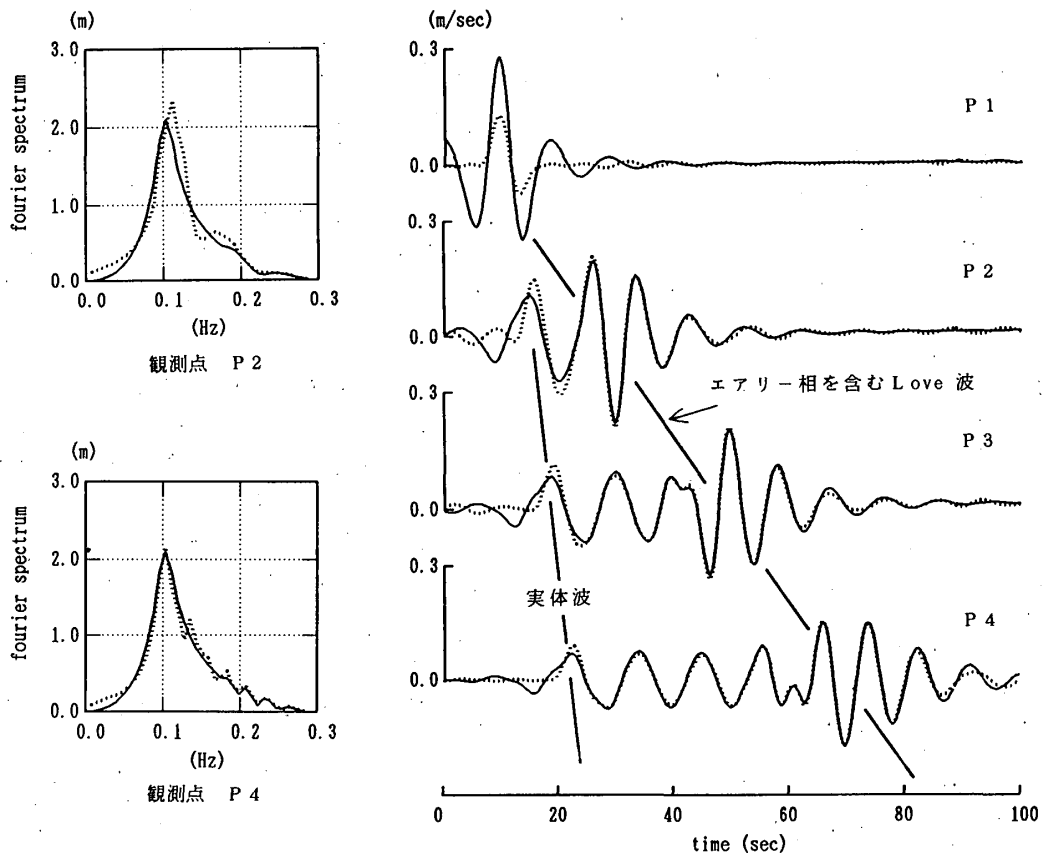


図-6 本解析手法(実線)とBEM(破線)による速度波形・フーリエ振幅スペクトルの比較(図-2のモデルB)

いるものの、それ以降の波形(Love波)は完全に再現されることが分かる。さらに、もともと水平波入射の場合、実体波の寄与はLove波に比べて小さく、また、実体波は幾何減衰するのに対し $(1/\sqrt{X})$ 、 X は水平距離)、Love波は減衰しないため、鉛直境界から離れるにつれて本手法とBEMによる結果は波形・スペクトルともに非常に良く一致してくる。したがって、本モデルのように水平に伝播する入射波を扱う場合、本手法はLove波のみならず、鉛直境界の近傍を除いて堆積盆地内で発生する全体の波動場において非常に良い精度で解を与えることが分かる。

ちなみに演算時間は、BEMでは大型計算機(東大計算機センターのM-680H)で数分かかるのに対し、本手法ではパソコン(NECのPC-9801RA)で数分かかるのみで、本手法の方が比較にならないほど速い。特に本手法では、いくら水平距離が長くなっても、(13)式に示されるように最後の指数関数部の水平距離 ξ が変わるのみで、演算時間・精度ともに変わらないという利点がある。それに対し数値解析手法では、水平距離が長くなるにつれ飛躍的に演算時間が増大し、さらに誤差の累積が大きくなり精度も悪化する、という欠点がある。したがって既存の数値解析手法に比べ、本手法は扱う水平距離が長くなるほど有効になる。

4. 結論

多層の沖積平野、沖積谷、堆積盆地内で発生するLove波を正規モードと境界積分法を用いて合成する実用的な解析手法を提案し、その妥当性を調べた。ただし本手法では、二次元面外場、水平に入射する平面SH波、入射領域が一様な1/4無限体、透過領域が水平成層な1/4無限体、両領域間の鉛直な境界面であることを仮定している。さらに定式に当たっては、反射場での回折波、透過場での実体波の寄与を無視している。本手法の妥当性を確認するため、重複反射理論とBEMによる数値解析結果との比較を行った。その結果、重複反射理論では堆積盆地の地震動を過小に評価するのに対し、本手法では堆積盆地内で発生するLove波を完全に再現し、さらに実体波をも含む全体の波動場においても、鉛直境界の近傍を除いて、精度の良い解を短い演算時間で計算することを確認した。今後は、さらに実際の観測波と比較することから、本手法の現実の地盤への適用性を調べて行く予定である。

謝辞

早稲田大学・理工学研究所の山田 真講師にはグラフィックに関するプログラムを提供して頂きました。ここに記して感謝致します。

Appendix (A): 多層地盤における正規モード解

三次元成層地盤における正規モード解はHarkrider¹⁹⁾によつ

て示された。本研究に必要な、二次元成層地盤における正規モード解も全く同様な定式化によって得られる。ここでは Regan and Harkrider¹⁸⁾ の表記に習い、二次元面外場の正規モード解を示す。

二次元成層地盤（堆積層は $N-1$ 層で構成されているとする）の S 層内の (ξ, ξ) 点の面外方向に、単位の大きさの線振源を作用させた時、 O 層内の (X, Z) 点で得られる Love 波、すなわち面外場の正規モード V^L は次式で与えられる。

$$V^L(X, Z; \xi, \xi) = -i \sum_{m=0}^M \frac{A_L^m(Z; \xi)}{k^m} \cdot e^{-i \cdot k^m \cdot X - \xi} \quad \dots\dots\dots (A-1)$$

ここで、 i は虚数、 m は Love 波のモード次数、 M は考慮している周波数に存在する最高次のモード次数である。また、 k^m ($=\omega/c^m$, c^m は m 次の位相速度) は波数である。考慮している周波数 ω において存在する波数 k^m は、次の特性方程式から決定される。

$$F_L(k^m) = i[\bar{\mu}_N \cdot \gamma_N^m \cdot A^{m11} + A^{m21}] = 0, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (A-2)$$

ここで、 $\bar{\mu}_N$ は底部の半無限基盤のせん断剛性である。

(A-1) 式中、振幅に関する実数値関数 A_L^m は次式で表せる。

$$A_L^m(Z; \xi) = \hat{A}_L^m \cdot AS^{m11}(\xi) \cdot AO^{m11}(Z) \quad \dots\dots\dots (A-3)$$

ここで、 \hat{A}_L^m は Medium Response¹⁹⁾ であり、

$$\hat{A}_L^m = \frac{1}{A^{m11} \cdot F_{Lk}(k^m)} \quad \dots\dots\dots (A-4)$$

で与えられる。上式中、 F_{Lk} は特性方程式 F_L の波数に関する偏微分で、この値は解析的に計算できる²³⁾。

(A-2) 式と (A-4) 式の中に存在する A^{m11} , A^{m21} は、次のマトリックス成分として与えられる。

$$\begin{bmatrix} A^{m11} & A^{m12} \\ A^{m21} & A^{m22} \end{bmatrix} = [a_{N-1}^m] \cdot [a_{N-2}^m] \cdot \dots \cdot [a_1^m] \quad \dots\dots\dots (A-5)$$

ここで、 $[a_j^m]$ は j 層に関する Haskell 定義の Propagator matrix である。

$$[a_j^m] = \begin{bmatrix} \cos(Q_j^m) & i \cdot \sin(Q_j^m) / (\bar{\mu}_j \cdot \gamma_j^m) \\ i \cdot \bar{\mu}_j \cdot \gamma_j^m \cdot \sin(Q_j^m) & \cos(Q_j^m) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (A-6)$$

上式中、 $\bar{\mu}_j$ は j 層のせん断剛性であり、また Q_j^m は次式で与えられる。

$$Q_j^m = k^m \cdot \gamma_j^m \cdot H_j \quad \dots\dots\dots (A-7)$$

ここで、 H_j は j 層の厚さである。

さらに、(A-2) 式と (A-7) 式中にある γ_j^m は次式で定義される。

$$\gamma_j^m = \begin{cases} \sqrt{(C^m/\bar{\beta}_j)^2 - 1}, & C^m/\bar{\beta}_j \geq 1 \\ -i\sqrt{1 - (C^m/\bar{\beta}_j)^2}, & C^m/\bar{\beta}_j \leq 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A-8)$$

ここで、 $\bar{\beta}_j$ は j 層のせん断波速度である。

最後に (A-3) 式中の AS^{m11} , AO^{m11} を以下に与える。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} AS^{m11} & AS^{m12} \\ AS^{m21} & AS^{m22} \end{bmatrix} &= [a_{S1}^m] \cdot [a_{S-1}^m] \cdot \dots \cdot [a_1^m] \\ \begin{bmatrix} AO^{m11} & AO^{m12} \\ AO^{m21} & AO^{m22} \end{bmatrix} &= [a_{O1}^m] \cdot [a_{O-1}^m] \cdot \dots \cdot [a_1^m] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A-9)$$

ここでマトリックス $[a_{S1}^m]$, $[a_{O1}^m]$ は、(A-5) 式から求めるが、その際、(A-7) 式の代わりに、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} Q_{S1}^m &= k^m \cdot \gamma_S^m \cdot (\xi - D_S) \\ Q_{O1}^m &= k^m \cdot \gamma_O^m \cdot (Z - D_O) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A-10)$$

を用いる。ここで、 D_S と D_O はそれぞれ地表から S 層上端、 O 層上端までの距離である。

ソース点または観測点が、底部の半無限基盤内にある時は、

(A-9) 式を用いるよりも、(A-2) 式を応用した次式を用いた方が安定した解を得る。例えば、観測点の深さ Z が基盤 (N) 内にある時、 AO^{m11} は

$$AO^{m11}(Z) = A^{m11} \cdot \exp\{-R_N^m(Z - D_N)\}, \quad (Z \geq D_N) \quad \dots\dots\dots (A-11)$$

で表せる。ここで、 R_N^m は

$$R_N^m = k^m \sqrt{1 - (C^m/\bar{\beta}_N)^2} \quad \dots\dots\dots (A-12)$$

である。 R_N^m は実数であるため、(A-11) 式より AO^{m11} は Z が大きくなるにつれて指数関数として減少する。 AS^{m11} についても全く同様である。

Appendix (B) : 積分 ΔA_{Lj}^m の解析表示

次の積分を解析的に実行する。

$$\Delta A_{Lj}^m(\xi) = \int_{D_j}^{D_{j+1}} A_L^m(Z; \xi) dZ \quad \dots\dots\dots (B-1)$$

ここで、 A_L^m は、(A-3) 式から (A-12) 式で与えられ、また D_j は地表から j 層の上端部までの深さを意味する。

(A-6)、(A-9) 両式または (A-11) 式より、(B-1) 式の積分は Z に関する \sin , \cos または \exp の積分に帰着し、解析的に実行できる。

$$\Delta A_{Lj}^m(\xi) = \begin{cases} \hat{A}_L^m \cdot AS^{m11}(\xi) \cdot (\Delta C_j^m \cdot A_{j-1}^{m11} + \Delta S_j^m \cdot A_{j-1}^{m21}), & j < N \\ \hat{A}_L^m \cdot AS^{m11}(\xi) \cdot A^{m11} \cdot \Delta E_j^m, & j \geq N \end{cases} \quad \dots\dots\dots (B-2)$$

ここで、 ΔC_j^m , ΔS_j^m , ΔE_j^m はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_j^m &= \frac{\sin(Q_j^m)}{k^m \cdot \gamma_j^m} \\ \Delta S_j^m &= i \frac{1 - \cos(Q_j^m)}{k^m \cdot \bar{\mu}_j \cdot (\gamma_j^m)^2} \\ \Delta E_j^m &= \frac{\exp\{-R_N^m(D_j - D_N)\} - \exp\{-R_N^m(D_{j+1} - D_N)\}}{R_N^m} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (B-3)$$

また、 A_{j-1}^{m11} , A_{j-1}^{m21} は次のマトリックス成分である。

$$\begin{bmatrix} A_{j-1}^{m11} & A_{j-1}^{m12} \\ A_{j-1}^{m21} & A_{j-1}^{m22} \end{bmatrix} = [a_{j-1}^m] \cdot [a_{j-2}^m] \cdot \dots \cdot [a_1^m] \quad \dots\dots\dots (B-4)$$

ここで、 $[a_j^m]$ は j 層に関する Haskell 定義の Propagator matrix ((A-6) 式) である。

参考文献

- 1) 嶋 悦三：強震地動に見られる表面波成分，第3回日本地震工学シンポジウム，pp.277-284, 1970
- 2) 田中貞二，吉沢静代，大沢 胖：やや長周期帯における強震動の特性，地震研究所彙報，Vol. 54, pp.629-654, 1979
- 3) 日本建築学会：メキシコ地震を探る，第14回地盤振動シンポジウム，1986
- 4) 久田嘉章，山本俊六，谷 資信：境界要素法と断層震源モデルによる堆積盆地におけるSH波とLove波の地震波動解析，日本建築学会構造系論文報告集，第393号，pp.92-100, 1988
- 5) Sezawa, K : Possibility of the Free-Oscillations of the Surface-Layer Excited by the Seismic Waves, 地震研究所彙報，Vol. 8, pp.59-70, 1930
- 6) Kanai, K : The Requisite Conditions for the Predominant Vibration of Ground, 地震研究所彙報，Vol. 35, 457-471, 1957
- 7) Haskell, N. A. : Crustal Reflection of Plane SH Waves, J. Geophys. Res. Vol. 65, pp.4147-4150, 1960

- 8) Bard, P.-Y. and Bouchon, M. : The Seismic Response of Sediment-Filled Valleys. Part 1 : The Case of Incident SH Waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.70, No.4, pp.1263-1286, 1980
- 9) Drake, L. A. : Love and Rayleigh Waves in an Irregular Soil Layer, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.70, No.2, pp.571-582, 1980
- 10) 樋口盛一 : 或る複雑なる構成を有する地表に於けるラブ波の伝播に就いて, *地震*, pp.7-12, 1932
- 11) Sato, R. : Love Waves Propagated Across Transitional Zone, *Japanese J. of Geophys.*, Vol.2, No.2, pp.117-134, 1961
- 12) Kennett, L. N. : The Interaction of Seismic Waves with Horizontal Velocity Contrasts, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol.33, pp.431-481, 1973
- 13) Alsop, L. E. : Transmission and Reflection of Love Waves at a Vertical Discontinuity, *J. Geophys. Res.*, Vol.71, No.16, pp.3969-3984, 1966
- 14) 工藤一嘉 : 正規モード解による強震地動の研究とその応用, *東北大学・博士論文*, 1979
- 15) Its, E. N. and Yanovskaya, T. B. : Propagation of Surface waves in a half-space with vertical, inclined or curved interfaces, *Wave Motion*, Vol.7, pp.79-94, 1985
- 16) Niazy, A. and Kazi, M. H. : On the Love Wave Scattering Problem for Welded Layered Quarterspaces with Applications, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.70, pp.2071-2095, 1980
- 17) Bukchin, B. G. and Levshin, A. L. : Propagation of Love Waves across a Vertical Discontinuity, *Wave Motion*, Vol.2, pp.293-302, 1980
- 18) Regan J. and Harkrider, D. G. : Seismic Representation Theorem Coupling : Synthetic SH Mode Sum Seismograms for Non-homogeneous Paths, *Geophys. J.*, Vol.98, pp.429-446, 1989
- 19) Harkrider, D. G. : Surface Waves in Multilayered Elastic Media. Part.1 *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.54, pp.627-679, 1964
- 20) Hisada, Y., Yamamoto, S. and Tani, S. : Prediction of Ground Motion in the Ashigara Valley Using an Analytical Method, *Proc. of the National Symp. on Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, pp.245-254, 1989
- 21) Aki, K. and Richards, P. G. : *Quantitative Seismology* (W. H. Freeman and Company), Vol.1, 1980
- 22) 嶋悦三, ほか : 東京の基盤構造 (その2), *地震研究所彙報*, Vol.51, pp.45-61, 1976
- 23) 吉井敏尅 : 短周期の表面波, *地震*, 第22巻, pp.83-93, 1969

(1990年1月10日原稿受理, 1990年11月7日採用決定)